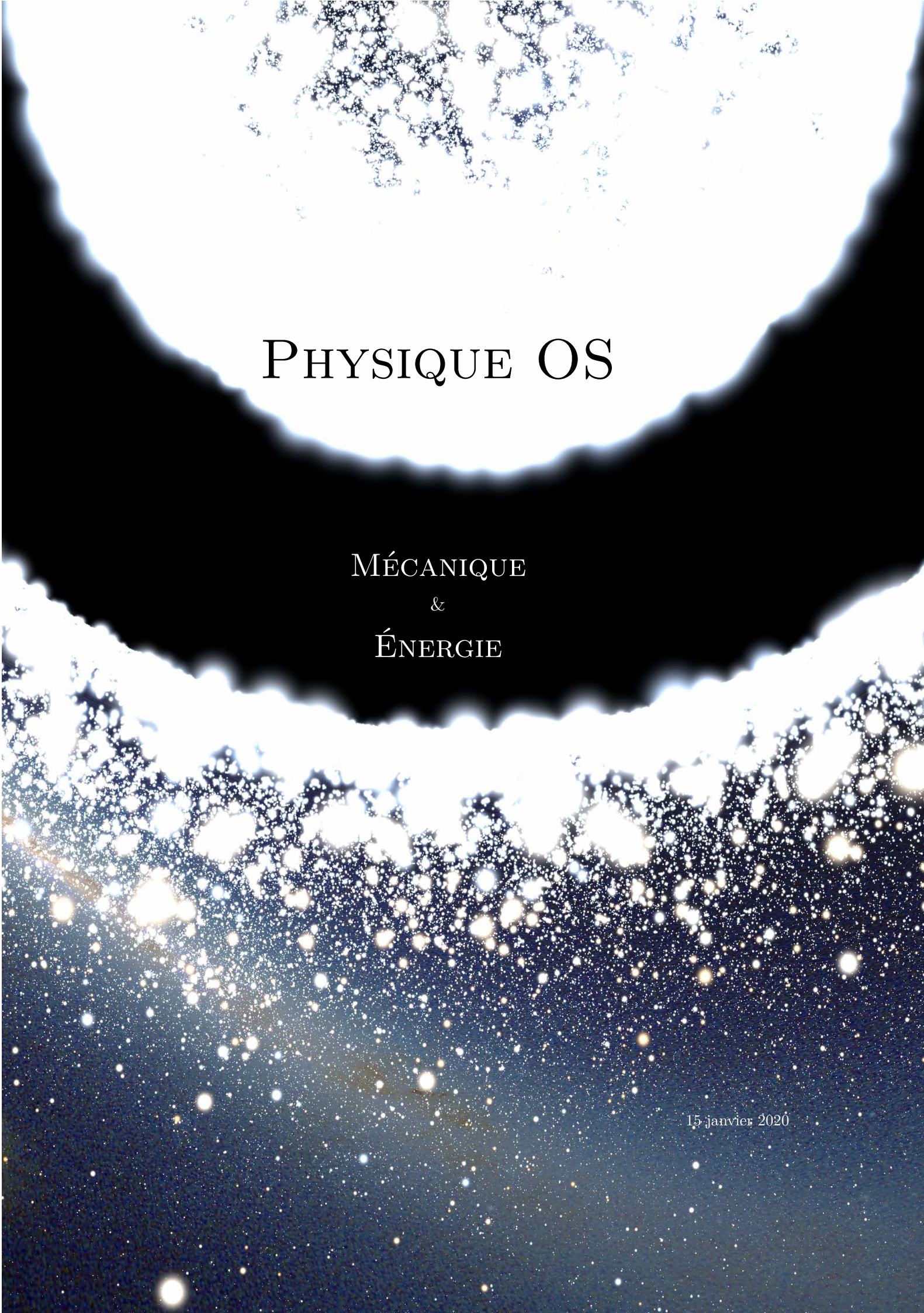


Physique OS

Mécanique & Énergie

15 janvier 2020

Préambule :

Ce cours de mécanique et énergie a été écrit au début avec le logiciel de PAO Lyx, une interface graphique au célèbre Latex et aujourd'hui directement en latex. Il a donc été créé dans un environnement (ces deux logiciels tournant sous GNU-Linux) libre dont l'objectif est de contribuer au progrès en mettant à disposition de chacun, pour un coût moindre, le travail de milliers de programmeurs bénévoles. Dans ce cadre, il était naturel de permettre à chaque étudiant d'avoir accès à ce cours librement. C'est pourquoi, à l'instar des logiciels, il est distribué sous licence GFDL, licence de documentation libre. Attention cependant aux images qui ne sont pas toutes sous licence GFDL, mais peuvent être soumises à une autre licence libre ou être dans le domaine publique. Cela peut avoir une importance dans certains cas.

Normalement la licence GFDL doit figurer avec le cours. Ce n'est pas le cas et ce pour ne pas allonger trop le texte. Mais le texte de la GFDL se trouve partout sur internet et il suffit d'un moteur de recherche pour le trouver. Par ailleurs, le texte de ce cours et ses sources LaTeXsont disponibles en téléchargement à l'adresse

https ://framagit.org/users/guyotv/projects

Pour tout renseignement complémentaire s'adresser à :

Vincent Guyot

Chapeau-Râblé 37

2300 La Chaux-de-Fonds

vincent@cvgg.org

Copyright 2020 Guyot Vincent

Permission vous est donnée de copier, distribuer et/ou modifier ce document selon les termes de la Licence GNU Free Documentation License, Version 1.1 ou ultérieure publiée par la Free Software Fundation ; avec les sections inaltérables suivantes :

Pas de section inaltérable

avec le texte de première page de couverture suivant :

Physique Mécanique & Énergie

avec le texte de dernière page de couverture suivant :

Pas de texte de dernière page de couverture

Une copie transparente de ce document se trouve à l'adresse suivante :

https ://framagit.org/users/guyotv/projects

Remerciements

Je tiens ici à remercier tout particulièrement l'encyclopédie Wikipedia et la NASA, pour les nombreuses illustrations dont ce cours à pu bénéficier. Toutes deux rendent accessibles gratuitement à tous des savoirs importants.

En particulier, je remercie Alain Riazuelo, cosmologue à l'Institut d'Astrophysique de Paris, chercheur au CNRS, pour la magnifique représentation (sous licence libre) d'un trou noir qui fait la couverture de cet ouvrage et qu'il est possible de consulter à l'adresse suivante :

`http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:FY221c15.png`

Il faut aussi évoquer dans ce cadre le magnifique ouvrage de Hans-Peter Nollert et Hanns Ruder Nollert et Ruder (2008) qui présente des images relativistes au voisinage de trous noirs dans l'esprit de celles d'Alain Riazuello. C'est un ouvrage d'abord pour les yeux, dans l'esprit de découverte de George Gamow, et pour l'esprit par les interrogations qu'il suscite.

L'image de couverture d'Alain Riazuelo est particulièrement adaptée à ce cours. En effet, on verra que l'accent est mis sur la notion de gravitation à travers la chute libre, les satellites et les marées. Évidemment, il s'agit de physique classique. Pas question d'aborder ici la relativité générale, au cœur de la description des trous noirs. Cependant, comme ils sont issus de la plus moderne des théories de la gravitation et qu'aujourd'hui ils sont autant vus à travers la relativité que sous l'angle de la physique quantique, ils sont la conclusion provisoire presque naturelle de notre compréhension de la gravitation dans cette incroyable courbure de l'espace qui les enveloppe.

Il faut aussi remercier les archives visuelles Émilio Segrè pour l'image de la chute de la lune des Principia de Newton, reproduite deux fois dans ce cours (pages 46 et 63). L'image est dans le domaine publique et c'est avec leur accord que je la publie, mais comme toujours, c'est le genre d'image qu'il est difficile d'obtenir. Merci à eux de nous la fournir comme illustration centrale de ce cours.

Je tiens enfin à remercier mes collègues MM. Michel Augsburger et surtout Marcel Fiechter pour leur travail, ingrat mais nécessaire, de relecture attentive, de corrections et de suggestions pertinentes qui ont grandement augmenté la qualité de ce cours.

Le chapitre d'introduction est un résumé d'une présentation d'introduction à la physique réalisée avec le logiciel BEAMER. Cette présentation est publiée en licence GFDL à la même adresse (www.cvgg.org) que ce cours. Toutes les images utilisées sont libres (dans le domaine publique ou en GFDL) et référencées. Elle constitue un complément à ce cours.

Avertissements

A l'instar des logiciels libres, je décline toute responsabilité relative à l'utilisation de ce cours. Comme je tiens à le mettre aussi vite que possible à disposition de tous, je mets clairement l'accent sur la réalisation de son contenu, plutôt que sur les nombreuses relectures qu'il nécessite assurément. Si la nécessité est claire, le temps manque et il faut faire des choix. J'encourage donc toute personne intéressée à collaborer avec moi à la création de ce cours, sous toute ses formes, à me contacter à l'adresse mail ci-dessus. Reste que si toutes les suggestions de corrections sont les bienvenues, cela ne veut pas dire qu'elles seront prises en considération immédiatement, pour des raisons de temps. Si cela vous semble insuffisant, n'hésitez pas à me faire parvenir vos modifications, corrections, ajouts déjà rédigés sous une forme directement intégrable au cours, en licence GFDL naturellement. Cela me permettra de les reporter plus rapidement dans le cours. Si cela est encore insuffisant, le mieux est de participer directement à la rédaction en prenant contact avec moi.

Table des matières

1 Introduction **21**
1.1 Du temps . . . 21
1.2 De l'infiniment grand à l'infiniment petit . . . 21
1.2.1 L'Univers . . . 21
1.2.2 Les amas de galaxies . . . 22
1.2.3 Les galaxies . . . 23
1.2.4 Les étoiles . . . 24
1.2.5 Le système solaire . . . 24
1.2.6 La Terre et la Lune . . . 27
La Terre . . . 27
La Lune . . . 29
Les marées . . . 30
1.2.7 Le monde subatomique . . . 32
Conclusion . . . 36

2 La cinématique **37**
2.1 Introduction . . . 37
2.2 Position . . . 37
2.2.1 Dimensions . . . 37
2.2.2 Système d'axes . . . 37
2.2.3 Position . . . 37
2.2.4 Déplacement . . . 38
2.2.5 Distance parcourue . . . 38
2.3 Vitesse . . . 38
2.3.1 Vitesse moyenne . . . 38
2.3.2 Exemples . . . 38
Exemple 1 . . . 38
Exemple 2 . . . 38
2.3.3 Vitesse instantanée . . . 38
2.4 Accélération . . . 39
2.4.1 Accélération moyenne . . . 39
2.4.2 Exemples . . . 39
Exemple 1 . . . 39
Exemple 2 . . . 39
Remarque : . . . 39

2.4.3 L'accélération instantanée . . . 39
2.5 Mouvements simples . . . 39
2.5.1 Le mouvement rectiligne uniforme . . . 39
Définition . . . 39
Propriétés . . . 39
Un exemple : Apollo en route vers la Lune . . . 40
Autre exemple : le déplacement d'Andromède . . . 41
2.5.2 Mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA) . . . 41
Définition . . . 41
Propriétés . . . 41
2.5.3 La chute libre . . . 42
Définition . . . 42
Propriétés . . . 42
Expérience . . . 42
Calculs . . . 42
Analyse des résultats . . . 43
Conclusions . . . 44
2.5.4 Balistique . . . 44
Définition . . . 44
Propriétés . . . 44
Équations . . . 44
Premier exemple . . . 45
Second exemple . . . 45
2.5.5 La chute libre ... de la Lune . . . 45
2.5.6 Mouvement circulaire uniforme (MCU) . . . 47
Relation importante . . . 47
2.5.7 Lois de Kepler . . . 48

3 La mécanique **51**
3.1 La « mécanique » d'Aristote . . . 51
3.1.1 Introduction . . . 51
3.1.2 Platon . . . 51
3.1.3 Aristote . . . 52
Cinématique . . . 52
Dynamique . . . 52
3.2 Mécanique de Newton . . . 55
3.2.1 Introduction . . . 55
3.2.2 Mécanique . . . 55
Les trois lois de Newton . . . 55
Force extérieure . . . 56
Exemples . . . 57
3.2.3 Types de forces . . . 57
Loi de la gravitation universelle . . . 58
Le poids . . . 58
Exemple . . . 59
Masse et poids . . . 60
Poids apparent . . . 60
Gravitation et MCU . . . 62
Troisième loi de Kepler . . . 63
Les marées . . . 65

Le frottement . . . 69
Exemple . . . 70
La force d'un ressort . . . 70
Exemple . . . 70

4 Mécanique en plusieurs dimensions **73**
4.1 Préliminaires . . . 73
4.1.1 Dimensions . . . 73
4.1.2 Système d'axes . . . 73
4.2 Notion de vecteur en physique . . . 73
4.2.1 Norme d'un vecteur . . . 73
4.2.2 Opérations vectorielles . . . 74
produit scalaire . . . 74
Produit vectoriel . . . 74
4.3 Mécanique . . . 74
4.3.1 Cinématique . . . 74
Position . . . 74
Vitesse . . . 75
Accélération . . . 75
4.3.2 Dynamique . . . 75
Première loi . . . 75
Seconde loi . . . 75
Troisième loi . . . 75
4.4 Exemples . . . 75
4.4.1 Statique . . . 75
4.4.2 Plan incliné . . . 76
4.4.3 Balistique . . . 78
4.4.4 Mouvement circulaire uniforme : MCU . . . 80
Définition . . . 80
Cinématique . . . 80
Relation importante . . . 81
Dynamique . . . 81
Virages inclinés . . . 81
Vitesses minimales . . . 82
Vitesses maximales . . . 83
4.4.5 Satellite en orbite géostationnaire . . . 84
Introduction . . . 84
Théoriquement . . . 84
Numériquement . . . 84
4.4.6 Mouvement central . . . 84
Mouvement kepleriens . . . 84
Loi de Kepler . . . 84

5 Mécanique différentielle **87**
5.1 Introduction . . . 87
5.2 Cinématique . . . 87
5.2.1 Exemples . . . 88
Mouvement rectiligne uniformément accéléré : MRUA . . . 88
Porté maximum en balistique . . . 88
5.3 Dynamique . . . 89

5.3.1 Intégration . . . 89
Chute libre . . . 89
Freinage . . . 89
5.3.2 Équation différentielle . . . 89
Chute dans un fluide visqueux . . . 89
Mouvement harmonique . . . 91
Mouvement harmonique d'une masse pendante . . . 92
Mouvement non linéaire . . . 93

6 Quantité de mouvement **95**
6.1 Introduction . . . 95
6.2 Quantité de mouvement . . . 95
6.2.1 Masse d'inertie . . . 95
6.3 Énergie cinétique . . . 96
6.4 Choc parfaitement élastique . . . 96
6.4.1 Exemple . . . 96
6.5 Choc parfaitement mou . . . 97
6.5.1 Exemple . . . 97
6.6 choc bidimentionnel . . . 98
6.6.1 Exemple . . . 98
6.7 Impulsion . . . 99

7 L'énergie **101**
7.1 Introduction . . . 101
7.2 Travail . . . 101
7.3 Puissance . . . 102
7.4 Énergie potentielle . . . 102
7.5 Énergie cinétique . . . 103
7.6 Théorème de l'énergie cinétique . . . 103
7.7 Conservation de l'énergie mécanique . . . 103
7.8 Variation de l'énergie mécanique . . . 105
7.9 Énergies renouvelables . . . 105
7.9.1 Énergie hydraulique . . . 105
Exemple . . . 106
Types de turbines . . . 107
Alternateur . . . 107
Problèmes rencontrés . . . 107
7.9.2 Énergie éolienne . . . 108
7.9.3 Énergie solaire . . . 109
Énergie solaire thermique . . . 109
Énergie solaire électrique . . . 111
7.9.4 Énergie géothermique . . . 112
7.10 Énergies non renouvelables . . . 112
7.10.1 Énergie nucléaire . . . 113
Fission . . . 113
Déchets radioactifs . . . 114
Accidents nucléaires . . . 115
Fusion . . . 115
7.10.2 Énergie de combustion : pétrole et gaz . . . 115

8 L'énergie **119**
8.1 Introduction . . . 119
8.2 Le travail . . . 119
8.2.1 Historiquement . . . 119
8.2.2 Définition . . . 120
Travail simple . . . 120
Travail et produit scalaire . . . 120
Travail cas général . . . 120
8.3 L'énergie . . . 121
8.3.1 Introduction . . . 121
8.3.2 Énergie potentielle . . . 121
8.3.3 Énergie cinétique . . . 122
8.3.4 Énergie mécanique . . . 122
8.3.5 Exemple . . . 122
8.4 Conservation de l'énergie . . . 122
8.4.1 Introduction . . . 122
8.4.2 Théorème de conservation de l'énergie mécanique . . . 122
8.4.3 Exemples . . . 123
8.5 Limite du théorème de conservation . . . 124
8.6 Forces conservatives . . . 124
8.6.1 Définition . . . 124
8.6.2 Exemples . . . 124
Le poids . . . 124
Le ressort . . . 125
8.6.3 Généralisation . . . 125
Énergie gravifique . . . 126

9 Physique théorique **129**
9.1 Introduction . . . 129
9.2 Énergie potentielle . . . 129
9.3 Énergie cinétique . . . 129
9.4 Quantité de mouvement . . . 129
9.5 Conservation de l'énergie . . . 130
9.6 Principe de moindre action . . . 130
9.6.1 Lagrangien . . . 130
9.6.2 Action . . . 130
9.6.3 Minimalisation . . . 131
9.7 Euler-Lagrange . . . 131

10 Thermodynamique **133**
10.1 Introduction . . . 133
10.2 Température . . . 133
10.2.1 Celsius . . . 133
10.2.2 Fahrenheit . . . 133
10.2.3 Kelvin . . . 134
10.2.4 Agitation moléculaire . . . 134
10.3 Dilatation . . . 134
10.4 Chaleur . . . 135
10.4.1 Chaleur spécifique . . . 135
10.4.2 Chaleur latente . . . 135

10.5 Énergie thermique . . . 136
10.5.1 Premier principe . . . 137

11 Thermodynamique **139**
11.1 Température et dilatation . . . 139
11.1.1 Température . . . 139
11.1.2 Dilatation . . . 139
11.2 Chaleurs spécifique et latente . . . 141
11.2.1 Introduction . . . 141
11.2.2 Chaleur spécifique . . . 141
Chaleur massique . . . 141
Capacité thermique . . . 142
Notion de mole . . . 142
Chaleur molaire . . . 142
Relation entre chaleur massique et molaire . . . 143
Chaleur latente . . . 143
Évaporation . . . 143
11.2.3 Bilan thermique . . . 144
11.3 Loi des gaz parfaits . . . 145
11.3.1 Équation d'état . . . 145
Pression . . . 145
État d'un gaz parfait . . . 145
Approche intuitive . . . 145
Approche moléculaire . . . 146
11.3.2 Gaz parfait . . . 147
11.4 Premier principe . . . 147
11.4.1 Chaleur . . . 147
11.4.2 Travail . . . 148
11.4.3 Énergie interne . . . 148
Équipartition de l'énergie . . . 149
11.4.4 Premier principe . . . 149
11.4.5 Changements d'états . . . 149
Transformation isobare . . . 150
Transformation isochore . . . 150
Transformation isotherme . . . 151
Transformation adiabatique . . . 151
11.4.6 Chaleurs spécifiques . . . 153
11.5 Machines thermiques . . . 154
11.5.1 Machine simple . . . 154
11.5.2 Moteur à explosion . . . 156
11.5.3 Moteur Diesel . . . 158
11.5.4 Machine de Stirling . . . 160
11.5.5 Climatiseur . . . 160
11.5.6 Réfrigérateur . . . 160
11.5.7 Pompe à chaleur . . . 160
11.5.8 Cycle de Carnot . . . 160
11.6 Thermodynamique statistique . . . 161
11.7 Second principe . . . 162

A Systèmes d'unités **163**
A.1 Introduction . . . 163
A.2 Opérateur d'unités . . . 163
A.3 Analyse dimensionnelle . . . 164
A.4 Les unités du Système International . . . 165
A.4.1 Exemple . . . 165
A.5 Conversions . . . 165
A.6 Sous-multiples . . . 166
A.7 Notation scientifique . . . 166
A.8 Règles de calcul . . . 167

B Deux systèmes de coordonnées **169**
B.1 Le système de coordonnées circulaires . . . 169
B.1.1 Introduction . . . 169
B.1.2 Description . . . 169
B.2 Coordonnées sphériques . . . 169
B.2.1 Introduction . . . 169
B.2.2 Description . . . 169
B.2.3 Latitude et longitude . . . 170

C Mesures de distances **171**
C.1 La taille de la Terre . . . 171
C.1.1 Le principe . . . 171
C.1.2 Techniquement . . . 172
C.2 La taille de la Lune . . . 173
C.3 La distance Terre-Lune . . . 173
C.4 La distance Terre-Soleil . . . 174
C.5 La distance des étoiles . . . 176

D Travaux pratiques **177**
D.1 Le rapport de laboratoire . . . 177
D.1.1 Plan d'un rapport de travail pratique . . . 178
Préliminaires . . . 178
Résumé . . . 178
But . . . 178
Théorie . . . 178
Description de l'expérience . . . 178
Résultats . . . 178
Discussion . . . 180
Conclusion . . . 180
Annexes . . . 180
D.2 La nébuleuse du Crabe . . . 181
D.2.1 Introduction . . . 181
D.2.2 But du travail pratique . . . 181
D.2.3 Dispositif expérimental . . . 181
D.2.4 Mesures . . . 181
D.2.5 Résultats . . . 181
D.2.6 Analyse . . . 181
D.3 Le pendule simple . . . 181
D.3.1 Les mesures . . . 181

D.3.2 Organisation des données et graphiques . . . 182
D.4 Mouvement simple : MRU . . . 182
D.4.1 Les mesures . . . 182
D.4.2 Organisation des données et graphiques . . . 182
D.4.3 Analyse des résultats . . . 182
D.5 Mouvement simple : MRUA . . . 182
D.5.1 But . . . 182
D.5.2 Théorie . . . 183
D.5.3 Les mesures . . . 183
D.5.4 Organisation des données et graphiques . . . 183
D.5.5 Galilée et le plan incliné . . . 183
D.6 La chute libre . . . 183
D.6.1 Cette expérience donnant lieu à un rapport noté, elle n'est pas décrite. . . . 183
D.6.2 Résultats . . . 183
D.7 Le canon horizontal . . . 183
D.8 Le chariot à masse pendante . . . 184

E Rotations **185**
E.1 Rotation de la Terre sur elle-même . . . 185
E.2 Rotation de la Terre autour du Soleil . . . 185
E.3 Rotation du Soleil dans la Voie Lactée . . . 187
E.4 Vitesse et référentiel . . . 187

F MRUA développements **189**
F.1 La position . . . 189
F.2 Une autre relation bien pratique . . . 189
F.2.1 Cinématique . . . 189
F.2.2 Énergie . . . 190

G Chute de la Lune **191**
G.1 Introduction . . . 191
G.2 Accélération . . . 191
G.3 Force de gravitation . . . 192

H Satellite en orbite géostationnaire **193**
H.1 Introduction . . . 193
H.2 Théoriquement . . . 193
H.3 Numériquement . . . 194
H.4 Loi de Kepler . . . 194

I Relativité **195**
I.1 Relativité galiléenne . . . 195
I.2 Transformation galiléenne . . . 196
I.3 Invariance . . . 197
I.4 Forces inertielles . . . 197
I.4.1 Force d'inertie . . . 197
I.4.2 Force centrifuge . . . 198

J Marées **199**
J.1 Introduction . . . 199
J.2 Centre de gravité . . . 199
J.3 Force d'inertie . . . 200
J.3.1 Vitesse angulaire . . . 200
J.3.2 Force d'inertie . . . 200
J.4 Poids relatif . . . 201
J.5 Analyse différentielle . . . 201
J.6 Autres rythmes . . . 201
J.6.1 Décalages . . . 202
J.6.2 Marées de vives et mortes eaux . . . 202
J.6.3 Marées d'équinoxes . . . 202
J.6.4 Marées de périgée et périhélie . . . 203
J.6.5 Marées de déclinaison . . . 203
J.6.6 Retards et marées côtières . . . 203
J.7 Limite de Roche . . . 203
J.7.1 Modèle simplifié . . . 204
J.7.2 Exemples . . . 205

K Énergies **207**
K.1 Introduction . . . 207
K.2 Énergie hydraulique . . . 207
K.3 Énergie éolienne . . . 208
K.3.1 Règle de Betz . . . 208
K.3.2 Éoliennes . . . 209
Éolienne de Collonges-Dorénaz . . . 209
Éoliennes du Mont Soleil (Jura suisse) . . . 209
K.4 Géothermie . . . 209
K.5 Énergie de combustion des déchets . . . 210

L Exercices **211**
L.1 Problèmes . . . 211
L.1.1 Relatifs à la conversion d'unités et à la notation scientifique . . . 211
L.1.2 Relatifs aux notions de déplacement, position et distance parcourue . . . 211
L.1.3 Relatifs à la notion de vitesse . . . 212
L.1.4 Relatif à la notion d'accélération . . . 212
L.1.5 Relatif au MRU . . . 213
L.1.6 Relatif au MRUA . . . 213
L.1.7 Relatifs à la physique aristotélicienne . . . 214
L.1.8 Relatifs à la physique newtonienne . . . 214
L.1.9 Relatifs aux forces . . . 216
L.1.10 Relatifs à l'énergie . . . 218
L.1.11 Relatifs à la conservation de l'énergie . . . 218
L.1.12 Relatifs à l'énergie hydraulique . . . 219
L.1.13 Relatifs à l'énergie éolienne . . . 219
L.1.14 Relatifs à l'énergie solaire . . . 219
L.2 Solutions . . . 220
L.3 Solutions OS . . . 235

M Ordre de grandeur, erreur et incertitudes **247**
M.1 Ordre de grandeur . . . 247
M.1.1 Chiffres significatifs . . . 247
M.1.2 Ordre de grandeur . . . 247
M.2 Écart et erreur . . . 248
M.3 Incertitude . . . 250
M.3.1 Addition/soustraction . . . 250
M.3.2 Multiplication par un entier . . . 251
M.3.3 Multiplication/division . . . 251
M.3.4 Puissance . . . 252
M.3.5 Résumé . . . 252
M.3.6 Exemples . . . 253

Liste des figures

1.1 L'univers profond . . . 22
1.2 Modèles de courbure . . . 22
1.3 L'évolution du Soleil . . . 23
1.4 Groupe local . . . 24
1.5 Galaxie du Sombrero . . . 24
1.6 Interaction de deux galaxies . . . 25
1.7 Nébuleuse planétaire . . . 25
1.8 Première exoplanète . . . 25
1.9 Système solaire . . . 26
1.10 La taille des planètes . . . 27
1.11 La taille des planètes . . . 28
1.12 Une comète . . . 28
1.13 Étoiles filantes . . . 28
1.14 Les saisons . . . 29
1.15 Les saisons . . . 29
1.16 La terre et la lune . . . 29
1.17 Les phases de la lune . . . 31
1.18 Orbites de la lune et du soleil . . . 31
1.19 Les marées . . . 32
1.20 La nébuleuse du Crabe . . . 32
1.21 L'atome de Bohr . . . 33
1.22 L'atome : onde de probabilité . . . 35
1.23 L'orbitale : onde de probabilité . . . 35

2.1 Un système d'axes en une dimension . . . 37
2.2 La position d'un objet . . . 38
2.3 Apollo 16 . . . 40
2.4 Collision Andromède-Voie Lactée . . . 41
2.5 Chute libre . . . 44
2.6 Chute libre . . . 44
2.7 L'idée de la chute de la Lune . . . 46
2.8 L'idée de la chute de la Lune Illustration des Principia. . . . 46
2.9 Chute de la Lune sur la Terre . . . 46
2.10 Mouvement circulaire uniforme . . . 48
2.11 Astronomica pars Optica . . . 49

2.12 Résumé de cinématique 50

3.1 La balance de Cavendish 58
3.2 Loi de la gravitation universelle. 59
3.3 Poids apparent 61
3.4 La sensation des mouvements 62
3.5 L'idée de la chute de la Lune Illustration des Principia. 63
3.6 Pleines et basses mers 65
3.7 Système Terre-Lune 67
3.8 Construction de Proctor 67
3.9 Force de marée 68
3.10 La force de frottement 69
3.11 Freins de wagon 70
3.12 Essieu de wagon 70
3.13 Force élastique d'un ressort 70
3.14 Résumé de mécanique 72

4.1 Équilibre statique 75
4.2 Le plan incliné 76
4.3 Le plan incliné 77
4.4 Tir balistique 78
4.5 Tirs balistiques 80
4.6 Parabole de sécurité 80
4.7 Mouvement circulaire uniforme 81
4.8 Virages incliné : vitesse minimale 82
4.9 Virages incliné : vitesses minimale 82
4.10 Virages incliné : vitesse maximale 83

5.1 Chute visqueuse 90
5.2 Chute dans un fluide visqueux 91
5.3 Masse oscillante 91
5.4 Masse suspendue 92
5.5 Masse oscillante suspendue 93

6.1 Choc 2 dim 99

7.1 Puissance 102
7.2 Énergie cinétique et potentielle 104
7.3 Barrage d'Emosson 106
7.4 Turbine Pelton 107
7.5 Ancienne turbine Pelton 107
7.6 Éolienne 108
7.7 Pale d'éolienne 108
7.8 Tube de vent 109
7.9 Solaire thermique 111
7.10 Effet photoélectrique 111
7.11 Cellule photoélectrique 111
7.12 Applications de la géothermie 113
7.13 Fission de l'uranium 114
7.14 Réacteur nucléaire 114

7.15 Combustion du méthane . . . 116
7.16 Résumé de l'énergie . . . 117

8.1 Énergie et vitesse . . . 119
8.2 Balance à fléau . . . 119
8.3 Travail simple . . . 120
8.4 Travail et produit scalaire . . . 120
8.5 Travail en général . . . 120
8.6 Travail du poids . . . 125
8.7 Force et énergie potentielle de gravitation entre la Terre et le Soleil . . . 127

10.1 Thermomètres . . . 134
10.2 Changements d'états . . . 136
10.3 Résumé de thermodynamique . . . 138

11.1 Dilatation linéaire . . . 140
11.2 Fusible bilame . . . 140
11.3 Dilatation volumique . . . 140
11.4 Travail et diagramme P-V . . . 148
11.5 Transformation isobare . . . 150
11.6 Transformation isochore . . . 151
11.7 Transformation isotherme . . . 151
11.8 Transformation adiabatique . . . 152
11.9 Moteur thermique . . . 155
11.10Diagramme d'état . . . 155
11.11Diagramme d'état . . . 156
11.12Diagramme d'état . . . 156
11.13Moteur à explosion . . . 157
11.14Diagramme d'état . . . 157
11.15Diagramme d'état . . . 158
11.16Le cycle de Carnot . . . 160

A.1 Relation de l'arc de cercle . . . 165

B.1 Système de coordonnées circulaires . . . 169
B.2 Système de coordonnées sphériques . . . 170

C.1 Taille de la terre . . . 171
C.2 Taille de la lune . . . 173
C.3 Parallaxe de Mars . . . 174

D.1 Rail horizontal . . . 178
D.2 Chute libre . . . 179

E.1 Le système géocentrique de Tycho Brahé . . . 186
E.2 Le Soleil dans la Voie Lactée . . . 187

F.1 *Discours concernant deux sciences nouvelles* de Galilée . . . 189

G.1 Chute de la lune . . . 191

H.1 Satellite 193

I.1 Transformation de galilée 196
J.1 Marée 199

J.2 Système Terre-Lune 200
J.3 Système Terre-Lune-eau 200
J.4 Décalage horaire 202
J.5 Vives et mortes eaux 202
J.6 Limite de Roche 204
J.7 Limite de Roche 205

K.1 Le barrage du Châtelot 207

L.1 Le rayon de la Terre par Eratosthène 212
L.2 La poulie 215
L.3 Masse pendante 216
L.4 Deux poulies 216
L.5 Bloc suspendu 218
L.6 Graphes horaires du MRU. 223
L.7 Chute aristotélicienne de la tour Eiffel. 226
L.8 Une fusée. 226
L.9 Une remorque 227
L.10 Un ascenseur 230
L.11 Force inclinée 235
L.12 Lampe suspendue 236
L.13 Plan incliné 237
L.14 Corde poulie 240
L.15 Corde tirée poulie 240
L.16 Corde tirée poulie juste 240
L.17 Frottements 243
L.18 Forces sur bloc suspendu 244

M.1 Baguettes d'une année 250

Liste des tableaux

1.1 Tableau des particules élémentaires 34

2.1 Données de la mission Apollo 12 40
2.2 La hauteur en fonction du temps 42
2.3 La vitesse en fonction du temps 43

10.1 Cœfficient de dilatation linéaire 135
10.2 Chaleur spécifique 135
10.3 Chaleur latente 136

11.1 Coefficient de dilatation linéaire 140
11.2 Coefficient de dilatation volumique 141
11.3 Chaleur massique 142
11.4 Chaleur latente 143
11.5 États caractéristiques 154
11.6 Grandeurs caractéristiques 156

A.1 Les unités du Système International 166
A.2 Conversions d'unités 166
A.3 Quelques équivalents 166
A.4 Multiples et sous-multiples 167

D.1 Tableau de mesures 179

M.1 La longueur des baguettes de pain 248
M.2 La longueur d'autres baguettes de pain 249
M.3 Des centaines de baguettes de pain 249

Chapitre 1

Introduction

Cette introduction présente en premier lieu l'incontournable notion de temps qui donne à la physique toute sa mesure. Elle extrait du temps commun les cycles particuliers qui ont longtemps rythmé nos vies pour finalement revenir au temps commun si particulier au mouvements des horloges atomiques et des quartz.

Puis, elle souligne le fait que ce mouvement qui nous rythme est toujours celui d'un corps et qu'il ne prend sens que dans le cadre de la description de ce qu'on appelle une structure. Car il est important de marquer que le mouvement n'a lieu que par rapport à une référence, c'est-à-dire par rapport à d'autres corps. Ainsi, tant le mouvement que l'étude du mouvement ne peuvent-ils plus être absolus. L'idée newtonienne de mouvement absolu a fait la place à la relativité et l'étude du mouvement des objets doit être placée au sein des différentes structures connues de l'univers. De ce fait, on se rend mieux compte que le mouvement est partout et qu'après la perception des choses, il est naturel de s'attarder à la compréhension des mouvements.

Enfin, elle montre que la description des mouvements des corps est une étape préliminaire à l'étude des causes du mouvement et à la prédiction de leur évolution. On y voit que la description des divers mouvements que l'on peut aborder n'est pas simple parce que les types de mouvements sont nombreux et que les différentes manières de les décrire sont très variées.

1.1 Du temps

Le temps qui nous rythme aujourd'hui si précisément n'est pas issu d'une évidence. A l'origine, il est évidemment la marque de répétitions qui peuvent sembler l'être, mais qui bien vite ont présenté des périodes très complexes.

Qui dit périodes dit donc mouvement et, plus précisément, mouvement répétitif. En premier lieu il y a le mouvement de la Terre sur elle-même, ou plutôt, n'en déplaise à Copernic, le mouvement du Soleil « autour » de la Terre. Ce mouvement définit évidemment la durée d'un jour. Puis, il y a le mouvement de la Lune dont la période d'environ trente jours définit le mois. Enfin, il y a la succession des saison qui définit l'année, d'une durée de 365 jours. Celle-ci correspond à la période de rotation de la Terre autour du Soleil.

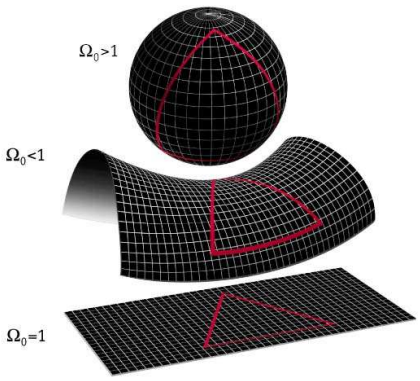
1.2 De l'infiniment grand à l'infiniment petit

1.2.1 L'Univers

La plus grande structure connue est l'univers. La taille de l'univers observable est estimée à environ 43 MAL, soit 43 milliards d'années lumière. Sa composition est analogue à une sorte de gaz dont les particules seraient réparties uniformément dans le volume qui le contient. Sauf que de contenant il n'y a pas et que les particules sont des super-amas de galaxies dont la taille ne dépasse pas 200 à 300 millions d'années lumière. Leur nombre dans l'univers est estimé à 10 millions.

Figure 1.1 – *L'univers profond*
Image du télescope spatial Hubble[1]

Figure 1.2 – *Modèles de courbure*
Trois modèles issus de la relativité générale[2]



Les super-amas de galaxies sont des amas d'amas de galaxies. C'est au niveau de ces super-amas de galaxies que l'univers apparaît assez homogène bien que constitué aussi d'une structure filamenteuse. L'ordre de grandeur de telles structures est de 100 Mpc soit $3 \cdot 10^{24}$ m pour les super-amas de galaxies, voire 150 Mpc soit $5 \cdot 10^{24}$ m pour les filaments.

L'univers est en expansion, ce qui signifie qu'il s'agrandit. Selon les dernières mesures effectuées par les astrophysiciens, sa forme serait plate [a]. Qu'est-ce que cela signifie pour un univers qui est manifestement un volume ? En fait, cela veut dire qu'on peut se l'imaginer comme une feuille de papier dont les dimensions augmenteraient indéfiniment. Nous serions alors des êtres à deux dimensions incapables de se déplacer ailleurs que sur cette feuille. En particulier incapables d'en sortir. Cette feuille s'étendrait donc dans une (troisième) dimensions inaccessible pour nous. Ainsi, notre univers à trois dimensions s'étend dans une dimension supplémentaire qui nous est inaccessible (c'est-à-dire qu'on ne peut s'y déplacer librement), une quatrième dimension, le temps.

Il y a peu de cela (quelques année seulement) une autre solution semblait être possible. L'univers, selon les modèles des cosmologistes (physiciens étudiant l'univers), aurait pu être une sphère. On aurait donc pu le voir comme un ballon, enflant comme la grenouille qui voulait se faire aussi grosse qu'un bœuf, sur lequel on aurait posé des amas de galaxies en deux dimensions (c'est le nombre de dimensions correspondant à la surface d'un ballon puisque tout point de la surface d'une sphère peut être repéré par deux coordonnées : la longitude et la latitude. Voir annexe B.2.3). Ainsi notre univers aurait été un ballon avec une surface tridimensionnelle enflant dans une quatrième dimension, le temps.

En réalité, les choses sont plus complexes encore, puisqu'aujourd'hui les physiciens envisagent cet univers dans une dizaine de dimensions [b]. Ils laissent supposer aussi l'existence de plusieurs univers parallèles, dits univers bulles.

1.2.2 Les amas de galaxies

Viennent ensuite les amas de galaxies. Leur nombre dans l'univers est estimé à 25 milliards. La répartition de ces amas de galaxies n'est pas homogène, contrairement à celle des super-amas de galaxies. Cette répartition est celle de filaments qui laissent apparaître des zones plus ou moins denses d'amas de galaxies.

Cette répartition est complexe et encore sujette à de nombreuses discussions. En particulier elle est l'objet d'études approfondies en relation avec

a. Voir l'article « Quelle est la forme de l'univers », Science et Vie junior, avril 2001

b. Voir « Sur la piste des mondes parallèles », Science et Vie, Juillet 2002.

Giordano Bruno (1548-1600)

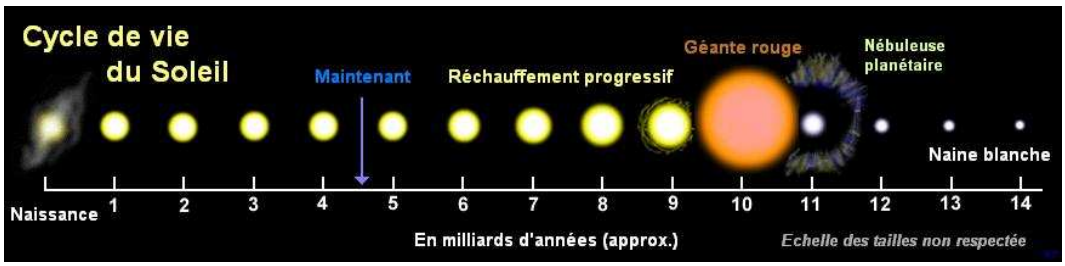
Un grand homme rebelle qui eut le malheur d'avoir raison avant les autres. Pour lui les étoiles étaient des soleils pareils au nôtre. Dans L'Infini, Bruno s'adresse à lui-même en ces mots :

> « *Enseigne-nous que la composition de notre astre et monde est égale à d'autant d'astres et de mondes qu'il nous est possible de voir. [...] Montre-nous que la substance des autres mondes dans l'éther est pareille à celle de notre monde.* »
> (Rocchi, 2000, p. 42.)

Giordano Bruno fut brûlé vif en 1600, pour avoir, sur la base d'une analyse du mouvement de la terre qui annonce la relativité restreinte de Galilée, remis en cause sa fixité et la finitude de l'univers.

Portrait de Giordano Bruno tiré de Wikipedia[3]

Figure 1.3 – *L'évolution du soleil*
Vers une nébuleuse planétaire[4]



la naissance de l'univers. En effet, il est difficile d'expliquer comment, à partir des conditions homogènes propres au big-bang, sont nées des structures aussi particulières. La figure 1.1 montre ce que l'on peut voir au-delà des étoiles de notre galaxie. Sur la photo de cette « petite » partie de l'espace ne figurent que des galaxies. Leur nombre et leur diversité sont saisissants. La figure 1.4 montre quant à elle le groupe local dans lequel se trouve notre galaxie la Voie Lactée. Il s'agit d'un amas de galaxies.

1.2.3 Les galaxies

Au nombre d'environ trois cent cinquante milliards dans l'univers, les galaxies sont des structures composées de centaines de milliards d'étoiles qui se regroupent sous l'effet de la force de gravitation. Dans l'espace interstellaire constituant le « vide » autour des étoiles se trouvent aussi des nuages de poussières et de gaz (des nébuleuses).

A cette échelle, les mouvements des galaxies sont perceptibles. Presque toutes s'éloignent de nous. Ce phénomène est appelé « expansion ». Il est interprété comme un mouvement dû au « gonflement » de l'univers lui-même. Le mouvement local des galaxies étant faible par rapport à celui général de l'expansion de l'univers, il est rare de voir des galaxies se rapprocher de nous. Pourtant, cela est le cas de la très fameuse (parce qu'observable à l'œil nu et la plus proche galaxie massive (autre que naine) de nous) galaxie d'Andromède.

Les mouvements locaux des galaxies entre elles donnent lieu à des « chocs » spectaculaires entre galaxies. Le résultat est par exemple le système des deux galaxies dites des « Chiens de chasse » ou sur la figure 1.6 « la grande spirale NGC 2207 »

Figure 1.4 – *Groupe local*
Les galaxies proches[5]

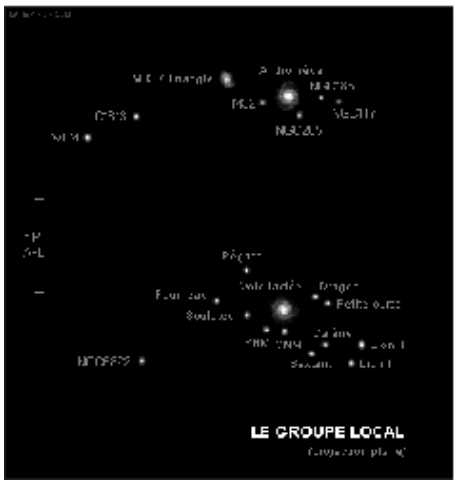


Figure 1.5 – *Galaxie du Sombrero*
Image du télescope spatial Hubble[6]

(à gauche), située à 114 millions d'années-lumière de la terre, étendant et disloquant sur plusieurs centaines de milliers d'années-lumière la « petite IC2163 » en longs filaments de « gaz et de poussières ».

1.2.4 Les étoiles

Les galaxies sont donc composées d'étoiles. Plus de 100 milliards pour la Voie Lactée, la galaxie dans laquelle nous nous trouvons. Environ 30 000 milliards de milliards pour l'univers en entier.

Ces étoiles sont plus ou moins grandes. Les plus grosses ont une masse d'une centaine de fois la masse de notre étoile, celle autour de laquelle nous nous déplaçons qui se nomme le Soleil. C'est une étoile de taille petite à moyenne. Le destin de notre étoile (voir figure 1.3) est d'enfler considérablement pour devenir une géante rouge et ensuite de s'effondrer en laissant ses couches extérieures en périphérie et en concentrant ses couches intérieures en une naine blanche, puis une naine noire. Le résultat présente l'allure spectaculaire (voir figure 1.7) de la « nébuleuse planétaire ». Pour les étoiles bien plus grosses que le Soleil, dont la masse m est telle que $1,4 \cdot m_{soleil} < m < 5 \cdot m_{soleil}$, l'évolution change. L'étoile commence par « gonfler » pour devenir une géante rouge, puis une super-géante qui explose de manière fracassante en une supernovae pour ne laisser finalement qu'une étoile à neutrons. Enfin, pour les très grosses étoiles, dont la masse m est telle que $m > 5 \cdot m_{soleil}$, l'évolution est la même que précédemment jusqu'à la supernovæ. Après les restes sont si denses qu'il se crée un trou noir.

Le destin et l'évolution des étoiles est donc une chose complexe, d'autant plus que les différents éléments répertoriés dans le tableau périodique de Mendeleïev ont été créés au sein des étoiles. Si la physique de ces constructions dépasse le propos de ce cours, il en sera dit quelques mots au paragraphe 1.2.7.

1.2.5 Le système solaire

Autour des étoiles qui composent notre galaxie tournent des planètes (actuellement plus de deux cent planètes extra-solaires ou exoplanètes ont été découvertes[9] ; voir aussi Casoli et Encrenaz (2005)).

La première exoplanète découverte l'a été en 1995 par l'observatoire de Genève. Elle l'a été par des moyens indirects, comme la plus part de celles qui ont été découvertes par la suite. Essentiellement, il s'agit d'étudier finement la vitesse de déplacement des étoiles autour desquelles les exoplanètes tournent. Si ce déplacement est saccadé, cela traduit la présence d'un corps en rotation autour d'elles. Une autre méthode consiste à observer des variations périodiques de l'intensité lumineuse des étoiles caractéristiques du passage d'une exoplanète devant elles.

En 2005, soit dix ans après, la première image d'une exoplanète (voir figure 1.8) a été réalisée par le VLT (Very Large Telescope). Il s'agit de la naine brune 2M1207, une étoile avortée faiblement lumineuse, autour de laquelle tourne une exoplanète d'environ cinq fois la masse de Jupiter, à une distance deux fois plus importante que celle de Neptune autour de notre étoile, le Soleil.

Figure 1.6 – *Interaction de deux galaxies*
Image du télescope spatial Hubble[7]

Figure 1.7 – *Nébuleuse planétaire*
Image du télescope spatial Hubble[8]

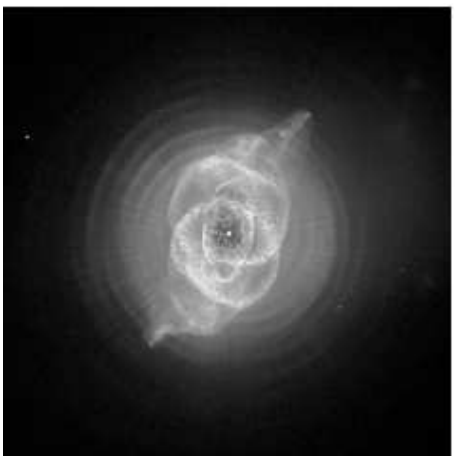
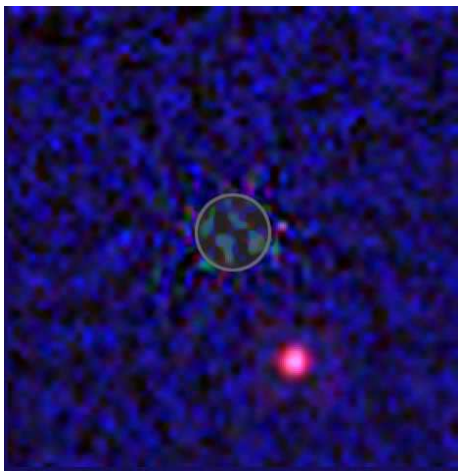


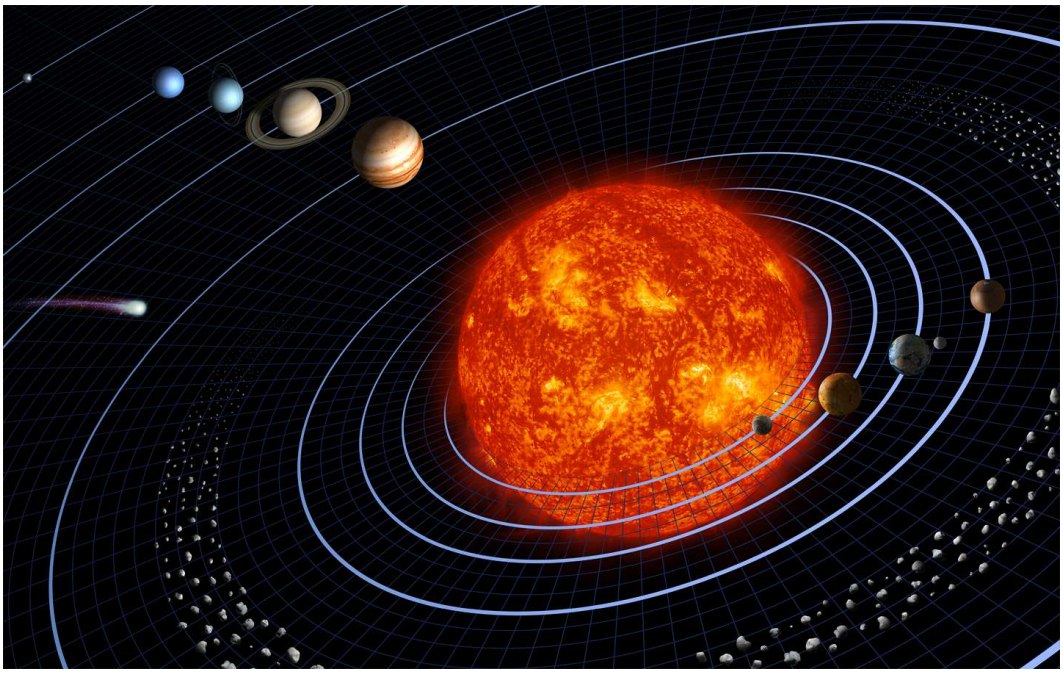
Figure 1.8 – *Première image d'une exoplanète*
Il s'agit d'une image dans le proche infrarouge. La planète est en bas à droite. Image de Hubble[10]



Le 13 novembre 2008, une seconde planète a été observée en lumière visible dans la constellation australe du Poisson autour de l'étoile Fomalhaut. C'est une planète d'environ trois fois la masse de Jupiter et elle se trouve à environ dix fois la distance entre le soleil et saturne de son étoile Fomalhaut.

Autour de notre étoile, le Soleil tournent huit planètes (MVTMJSUN ...) et d'autres corps plus petits parmis lesquels se trouvent des planètes dites naines. Cérès (dans la ceinture d'astéroïde), Éris (un tout petit peu plus grande que Pluton et qui fait partie de la ceinture de Kuiper, au-delà de l'orbite de Neptune) et Pluton en font partie. La figure 1.9 présente le système solaire sans respecter les ordres de grandeurs.

Figure 1.9 – *Système solaire*
Image de la Nasa[11]

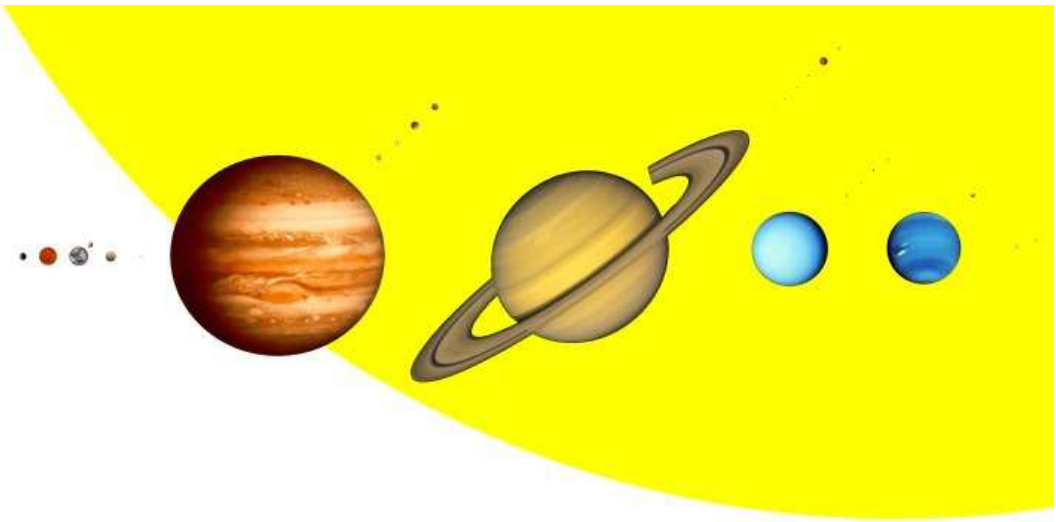


La rotation des planètes se fait dans un seul plan que l'on nomme le plan de l'écliptique. Relativement à la Terre, ce plan est décrit par l'orbite du soleil. La nuit, c'est donc le long de la trajectoire du Soleil qu'on peut voir certaines planètes. Car, si certaines sont visibles en pleine nuit, d'autres ne le seront jamais. C'est le cas, par exemple, de Vénus. C'est une planète qui tourne près du Soleil. Elle tourne aussi à l'intérieur du cercle (en réalité c'est une ellipse quasiment circulaire) que décrit la Terre sur sa trajectoire (on parle de l'orbite de la Terre et on parle de planète interne). C'est pourquoi, depuis la Terre, nous ne la verrons que dans le voisinage du Soleil. Ainsi, on peut la voir le matin avant que le soleil se lève (on l'appelle alors l'Étoile du matin) ou le soir, peu de temps après que le Soleil se soit couché (elle porte alors le nom d'Étoile du soir), mais pas au cours de la nuit. Les planètes se divisent en trois groupes : les quatre planètes dites telluriques sont celles qui sont le plus proche du soleil. Elles sont petites, solides et relativement semblables à la Terre. Les quatre planètes dites joviennes sont, à l'image de Jupiter, très grosses et gazeuses. Enfin, à partir de Pluton, les corps sont très petits, très éloignés et ne sont plus considérés comme des planètes (même si on parle de planètes naines). La figure 1.10 présente les planètes en respectant les ordres de grandeurs de leurs tailles respectives.

Il existe encore d'autres corps importants dans le système solaire : les *comètes* (voir figure 1.12). Ce sont de très petits corps (quelques dizaines de kilomètres de diamètre) qui viennent de régions très éloignées du système solaire (le nuage de Oort : « il s'agirait d'une vaste enveloppe de corps orbitant entre 40 000 au et 150 000 au (0,73 pc) de distance du Soleil, et donc située bien au-delà de l'orbite des planètes et de la ceinture de Kuiper »[13]) et qui, pour ainsi dire, tombent sur le Soleil selon une trajectoire très elliptique.

En passant elles laissent sur leur orbite une traînée de poussières qui se manifeste sous la forme d'une magnifique queue. Celle-ci est produite par le vent solaire qui emporte les éléments à la surface de la comète. La direction de la queue est donc toujours à l'opposé du soleil et peu être perpendiculaire à la trajectoire de la comète. La figure 1.11 présente pourtant un billet de banque suisse sur lequel est représenté une comète dont la queue ne pointe pas

Figure 1.10 – *La taille des planètes*
Image de la Nasa[12]



à tort vers le soleil.

Ce sont ces traînées de poussières que la Terre rencontre sur son orbite en donnant lieu aux fameuses pluies d'étoiles filantes (voir la figure 1.13 qui montre une observation des Léonides. « Les léonides sont causées par le passage d'une comète, la comète Tempel-Tuttle qui a une période de 33 ans. À chaque passage, la comète laisse une traînée de débris rocheux qui forme un essaim que la Terre traverse tous les ans aux environs du mois de novembre. Le radian étant situé dans la constellation du Lion, on appelle donc les météores « Léonides ». »[14]). Il s'agit de petites météorites qui se consument en entrant dans l'atmosphère en produisant une trace lumineuse, *les étoiles filantes*. Elles ne sont donc ni des étoiles, ni des planètes ou des comètes. Dans le cas des pluies d'étoiles filantes crées par la rencontre de la terre avec les poussières de l'orbite d'une comète, elles semblent provenir d'un point bien précis dans le ciel, comme la neige qui tombe sur le pare-brise d'une voiture semble venir d'un point situé dans la direction du déplacement de la voiture. Ce point se nomme le radian.

1.2.6 La Terre et la Lune

La Terre

On sait aujourd'hui que la Terre tourne autour du Soleil et sur elle même. Ainsi, lorsqu'on regarde le ciel depuis la Terre, la voûte céleste semble tourner au cours de la nuit. Les étoiles se lèvent au sud-est, pour aller se coucher au sud-ouest. Mais au nord, la situation est différente. En effet, l'Étoile Polaire ne tourne pas et les étoiles alentours semblent tourner autour d'elle. La Grande Ourse, notamment, reste toujours visible au voisinage de la Polaire. C'est une manifestation du fait que la direction de l'axe de rotation de la Terre est fixe dans l'espace. Pointer la Polaire du doigt est donc une façon de s'imaginer cet axe. Le fait que l'axe de rotation de la Terre reste fixe permet aussi d'expliquer le phénomène des saisons autrement que par la variation de distance Terre-Soleil au cours de l'année. Cette variation, souvent considérée comme l'explication des saisons, vient du caractère elliptique de l'orbite de la Terre autour du Soleil. Mais, elle ne peut en réalité servir d'explication car l'orbite de la Terre autour du Soleil est pratiquement un cercle, parce qu'il y aurait alors deux mêmes saisons par année et parce que celle-ci seraient identiques dans les deux hémisphères.

L'explication correcte vient de l'inclinaison de

Figure 1.11 – *La queue de la comète*

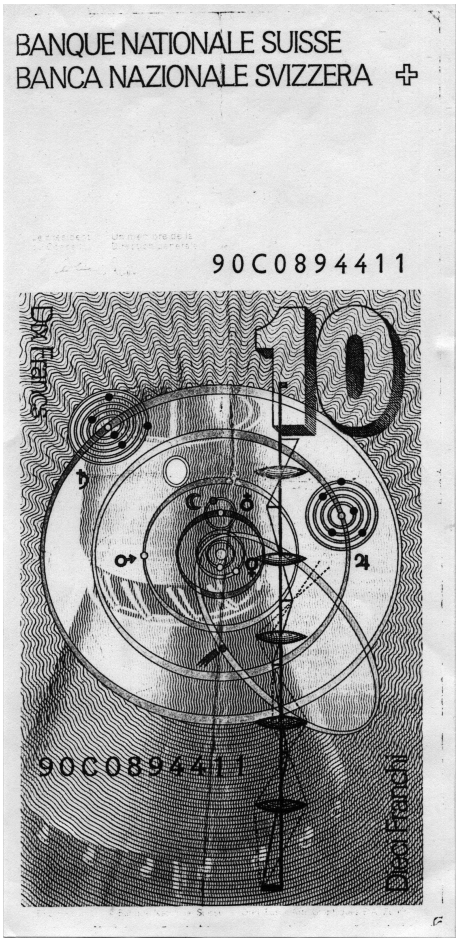


Figure 1.12 – *Une comète*
Image du télescope spatial Hubble[15]

Figure 1.13 – *Pluie d'étoiles filantes des Léonides*
Leonid Meteor Strom, as seen over North America in the night of November 12./13., 1833.[16]

l'axe de rotation de la Terre par rapport au plan de l'écliptique et de la permanence de sa direction dans l'espace (voir figure 1.14 ou l'angle $\alpha \simeq 66{,}5°$). En effet, comme cet axe n'est pas perpendiculaire au plan écliptique, l'un des deux hémisphères est plus « exposé » aux rayons du soleil que l'autre, ses rayons frappant plus perpendiculairement sa surface. Ainsi, comme le montre la figure 1.15, pour l'hémisphère sud, par exemple, la même quantité d'énergie E parvient sur une surface S' plus petite que S pour l'autre hémisphère où les rayons sont plus rasant. L'énergie par unité de surface E/S' dans l'hémisphère sud est donc plus importante que celle E/S dans le nord. C'est l'été dans l'hémisphère sud.

De plus, on ne peut comprendre que les saison soient différentes dans les deux hémisphères qu'avec un axe de rotation pointant toujours dans la même direction. Car ainsi, chaque hémisphère est tous les six mois éclairé par un soleil haut dans le ciel qui lui transmet un maximum d'énergie. Ce compor-

Figure 1.14 – *Les saisons*
Elles sont dues à l'inclinaison de l'axe de rotation de la terre par rapport au plan de l'écliptique.

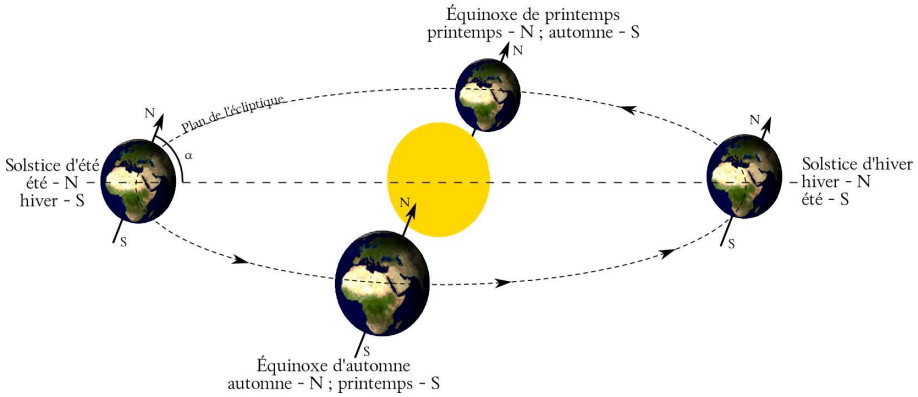


Figure 1.15 – *Les saisons*
Répartition de l'énergie à la surface de la terre.

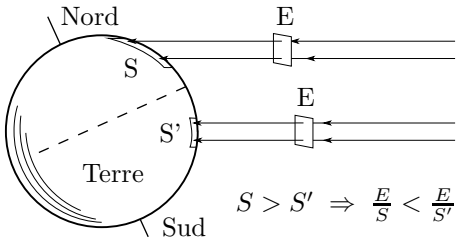


Figure 1.16 – *La terre et la lune*
Image de la Nasa[17]

tement de l'axe de rotation de la Terre est analogue à celui d'une toupie dont l'axe reste vertical pendant qu'elle tourne, alors qu'il ne peut le rester quand elle est immobile. La physique explique la fixité de cet axe à travers un loi de « conservation du moment cinétique » valable si aucune force extérieure ne s'exerce sur le système. Bien évidemment ce n'est pas tout à fait le cas pour la Terre et il faut admettre une légère variation de la direction de son axe de rotation. Mais il serait trop long ici de développer cet aspect.

La Lune

Finissons ce petit voyage dans le monde céleste en parlant de la Lune. La figure 1.16 montre le rapport de taille entre la Lune et la Terre, ainsi que les différences d'aspect de leur surface.

Il peut sembler au premier abord que le mouvement de la Lune est simple. En effet, elle gravite sur une ellipse (on la voit donc parfois un peu plus grosse et parfois un peu plus petite : au périgée où la distance terre-lune est de $3{,}654 \cdot 10^8$ m, son diamètre apparent est de $33{,}5'$ et à l'apogée où la distance vaut $4{,}067 \cdot 10^8$, metre, son diamètre apparent vaut $29{,}3'$, soit $\sim 10\%$ de la distance moyenne) en un mois environ. La variation apparente de sa taille, ainsi que de celle du soleil due à la trajectoire elliptique que suit la terre et qui oscille entre $31{,}5'$ et $32{,}5'$, expliquent l'allure des différentes éclipses de Soleil. Quand la Lune est éloignée de la Terre, elle ne cache pas tout le disque solaire et l'éclipse présente un anneau de lumière autour de la Lune, on parle alors d'éclipse annulaire. Par contre, quand la Lune est proche de la Terre, son diamètre apparent est plus grand et la Lune couvre tout le disque solaire. On parle alors d'éclipse totale.

Mais pour comprendre vraiment ce qu'est une

éclipse, il faut d'abord expliquer les phases de la Lune. Elles sont la conséquence du fait qu'une moitié de la Lune n'est pas éclairée.

Ainsi, quand la Lune nous présente cette moitié non éclairée, on ne la voit pas. C'est la Lune Noire ou Nouvelle Lune. Comme la Lune est alors pratiquement entre la Terre et le Soleil, seules les personnes qui se trouvent du côté jour de la Terre pourraient la voir. Or, quand il fait jour, le Soleil éclaire l'atmosphère qui nous cache alors les corps célestes.

Quand la Lune nous présente simultanément la moitié de sa partie non éclairée et la moitié de sa partie éclairée, on voit ce qu'on appelle une demi-Lune. En réalité on voit un quart de la Lune. C'est le Premier Quartier.

Quand la Lune ne nous présente plus que sa partie éclairée, elle est alors « derrière » la Terre par rapport au Soleil, on ne voit plus sa partie non éclairée : c'est la pleine Lune, environ deux semaines après la Nouvelle Lune.

Enfin, la Lune se présente une nouvelle fois en demi-Lune, c'est-à-dire qu'on en voit que l'autre quart. C'est le Dernier Quartier.

La figure 1.17 résume la situation décrite ci-dessus.

La question se pose alors de la différence entre éclipse de Soleil et Nouvelle Lune et éclipse de Lune et Pleine Lune. En effet, si la Lune tournait dans le plan de l'Écliptique, il se produirait une éclipse de Soleil chaque Nouvelle Lune et une éclipse de Lune chaque Pleine Lune. Comme on sait bien que ce n'est pas le cas, cela signifie que la Lune ne tourne pas dans le même plan que celui de l'Écliptique. En réalité le plan de rotation de la Lune fait un angle de $5°17'$ par rapport à l'Écliptique comme le montre la figure 1.18.

Comme ces plans ne coïncident pas, tant que la Lune n'est pas dans le plan de l'Écliptique, c'est-à-dire sur la ligne des nœuds présentée dans la figure 1.18, il ne peut y avoir d'éclipse. Or, la Lune coupe le plan de l'Écliptique deux fois par mois. Mais encore faut-il que la ligne des nœuds soit alors alignée avec le Soleil. Il faut dire aussi que le plan de rotation de la Lune tourne sur lui-même entraînant la ligne des nœuds avec lui. Sa période de rotation est de 18,61 a. Ainsi, la ligne des nœuds tourne sur elle-même d'un angle de $\sim 19{,}6°$ par an. Finalement donc, on peut calculer que l'alignement de la ligne des nœuds et du Soleil se fait tout les 173 d environ[20]. Cette durée constitue ce qu'on appelle une saison d'éclipses.

Mais, tout cela est encore compliqué, pour les éclipses de Soleil notamment, par le fait que l'ombre de la Lune ne couvre pas la totalité de la Terre. Si bien qu'en un lieu donné de sa surface, au moment où des éclipses de Soleil et de Lune sont possibles, il se peut que seule une éclipse de Lune soit visible, alors que celle de Soleil ne l'est pas à cet endroit.

Les marées

Un autre phénomène important dont l'origine est due à la Lune est celui des marées. Il n'est pas question ici de l'aborder autrement que très superficiellement. L'annexe J en donne cependant une présentation plus approfondie.

Le phénomène lui-même est le suivant. On observe dans certaines région du globe, comme la Bretagne par exemple, que la mer monte et descend périodiquement. Pour être plus précis, elle passe du niveau de pleine mer au niveau de basse mer en approximativement six heures. Ainsi, s'il se produit une marée haute à une heure du matin, une marée basse suivra à sept heures, puis à nouveau une marée haute à treize heures et enfin une marée basse à dix-neuf heures. On constate donc deux marées hautes et deux marées basses par jour. Comment l'expliquer ?

Dans un premier temps, l'explication paraît simple. La force de gravitation de la Lune attire les molécules d'eau. La surface des océans monte donc du côté de celle-ci comme le montre la figure 1.19(a).

Le problème est que cela ne suffit pas pour expliquer la présence de deux marées hautes (ou basses) par jour. En effet, considérons la figure 1.19(a) et imaginons la Terre tourner sur elle-même en vingt-quatre heures alors que la Lune ne se déplace que peu dans le même temps puisque sa période de rotation autour de la terre est d'environ un mois. Le point P est à marée haute. La rotation de la Terre la mène alors, sans que le « bourrelet » d'eau du côté de la lune ne bouge, en six heures au point P' et en douze heures au point P" qui est à marée basse. Ainsi, selon cette explication, il ne devrait y avoir qu'une seule marée haute par jour (c'est-à-dire un intervalle entre les marées haute et basse de douze heures).

Cette explication n'est donc pas suffisante. En

Figure 1.17 – *Les phases de la lune*
Ce n'est pas l'ombre de la terre[18]

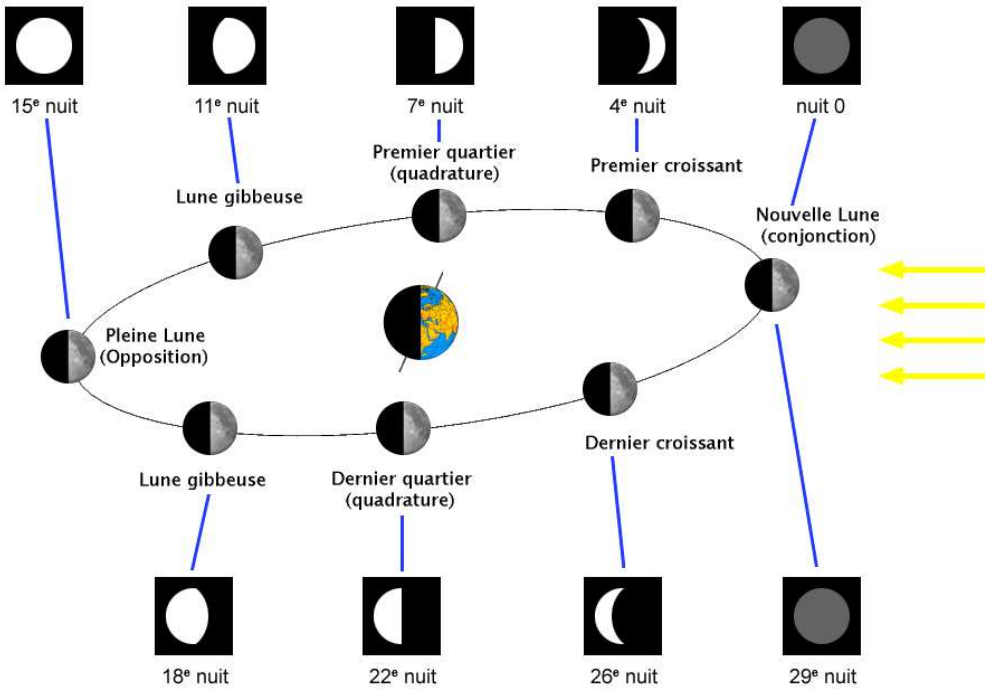
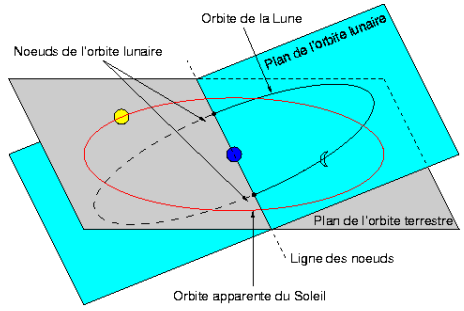


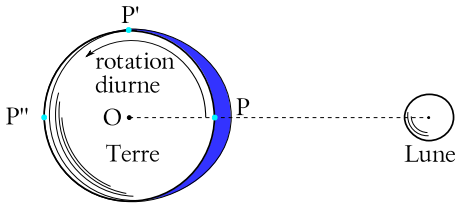
Figure 1.18 – *Orbites de la lune et du soleil*
Des plans différents[19]



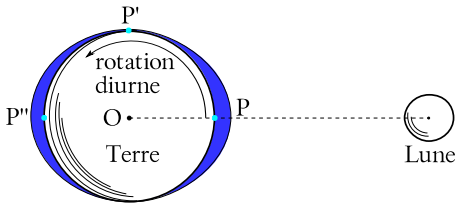
réalité, comme le montre la figure 1.19(b), un autre « bourrelet » d'eau se forme à l'opposé de la Lune. Son existence est due à la dynamique du couple Terre-Lune. Le couple Terre-Lune tourne autour d'un axe qui ne passe pas par le centre de la Terre mais par son centre de gravité. Le point P" tourne donc en même temps que la Lune autour de ce centre de gravité et, comme le poids en rotation au bout des bras d'un lanceur de marteau, cette eau semble « éjectée vers l'extérieur » (nous verrons par la suite que c'est plutôt parce que sans la gravitation de la Terre, elle continuerait son mouvement en ligne droite). C'est la raison de l'existence du « bourrelet » d'eau qui se forme à l'opposé de la Lune.

En conséquence, on voit sur la figure 1.19(b) qu'un observateur situé au point P observant une marée haute va se déplacer en raison de la rotation de la Terre sur elle-même en six heures vers le point P' qui est à marée basse. Puis, il va poursuivre son chemin pour arriver six heures plus tard au point P" qui est à marée haute. Ainsi, il peut y avoir deux marées haute par jour.

Ce dernier exemple montre que l'explication de la périodicité des marées passe obligatoirement par la dynamique du système Terre-Lune. Sans celle-ci, il ne serait pas possible de comprendre un phénomène dont on imagine souvent une explication basée uniquement sur la force de gravitation. Or, l'annexe J montre que d'autre rythmes de marées existent



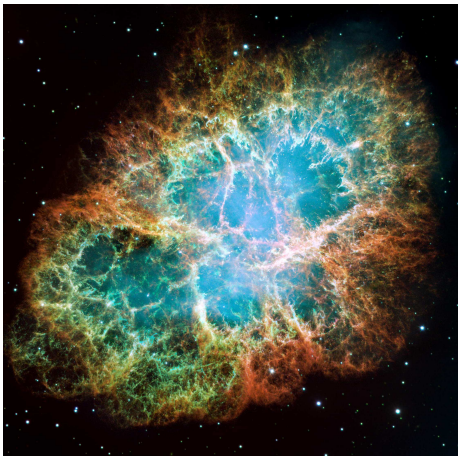
(a) Sans rotation de la lune



(b) Avec rotation de la lune

Figure 1.19 – *Les marées*

Figure 1.20 – *La nébuleuse du Crabe*
Les restes d'une supernovae[21]



dont la complexité tient encore à la dynamique des corps en présence.

Finalement, avec ce petit tour de l'horizon céleste, on peut maintenant mieux se rendre compte que les « objets » qui constituent notre univers sont loin d'être immobiles et que leurs mouvements sont difficiles à bien décrire... Mais c'est là la tâche de la physique que d'élaborer cette description avec précision pour nous permettre d'envoyer des hommes sur la Lune ou de placer des satellites de communication autour de la Terre.

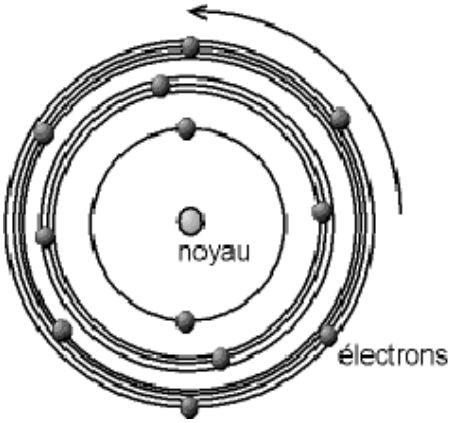
1.2.7 Le monde subatomique

D'un côté se trouvent des mondes bien plus grands que le nôtre et de l'autre des mondes bien plus petits. La biologie nous enseigne que nous sommes composés de cellules et la chimie que celles-ci sont faites de molécules. Chacune de celles-ci sont elles-même faites d'atomes. Or, ces atomes sont construits dans les étoiles (une bonne introduction à l'astrogénèse de la matière est donnée dans Vauclair (2006) ou Balibar *et al.* (2005)). En effet, le noyau d'un atome est essentiellement constitué de protons et de neutrons. Autour de ce noyau tournent des électrons qui sont retenus par la force électrique qui existe entre les électrons de charge négative et les protons de charge positive. Le noyau lui-même est donc chargé positivement. Les neutrons n'étant pas chargés, on peut se demander ce qui retient les protons ensemble. Si la seule force présente dans le noyau était électrique, les protons se repousseraient et le noyau éclaterait. Évidemment, il n'en est rien. Cela traduit la présence d'une autre force, assez faible pour passer inaperçue tant que les protons sont éloignés, mais plus forte que la force électrique quand ils se trouvent très proches les uns des autres, comme c'est le cas dans le noyau. Cette force est nommée *force forte*. On en dira quelques mots plus loin.

Comme cette force agit seulement à faible distance, c'est-à-dire qu'elle a une très courte portée et que la force électrique est importante tant que les protons sont assez loin les uns des autres, il est nécessaire pour les amener à portée de la force forte de les placer sous une grande pression. C'est alors que la force de gravitation entre en jeu, au sein des étoiles, en comprimant assez ces protons pour que la force électrique ne les empêche pas de s'assembler et que la force forte puisse les lier durablement. C'est donc au sein des étoiles que se créent les différents atomes, par assemblage de protons et de noyaux déjà constitués. C'est pourquoi l'astrophysicien Hubert Reeves a dit un jour que nous étions tous composés de poussières d'étoiles.

Actuellement, on compte 90 types d'atomes naturels, c'est-à-dire des atomes n'existant pas sur terre uniquement sous forme de traces. Le plus léger, l'hydrogène, est composé d'un proton et d'un électron. Le plus lourd, l'uranium, a un noyau

Figure 1.21 – *L'atome de Bohr*
Un système planétaire[22]



composé de 238 particules nommées nucléons. Cet atome comprend 92 protons, autant d'électrons et 146 neutrons. Comme l'uranium comprend 92 protons et qu'il existe 90 atomes naturels, deux éléments sont artificiels : le technétium ($^{98}_{43}Tc$) et le prométhium ($^{145}_{61}Pm$). Ensuite, les éléments comprenant un nombre de protons supérieur à 92 sont aussi artificiels.

La genèse de ces atomes est complexe. On peut distinguer plusieurs étapes.

Pendant le big bang, c'est-à-dire pendant les cent premières secondes de l'univers(Vauclair, 2006, p. 88), la densité et les pressions sont telles que l'hydrogène apparaît sous la forme d'un proton. Nous verrons par la suite comment. Puis, se forme le deutérium, isotope de l'hydrogène composé d'un proton et d'un neutron. Puis l'hélium 3 et 4 et le lithium 7. Et c'est tout, car la température diminuant, elle n'est plus assez grande pour permettre la formation d'éléments plus lourds.

A l'intérieur des étoiles, la formation d'hélium à partir de l'hydrogène se produit au début de leur vie. Cela passe en premier lieu par la formation de deutérium, puis d'hélium 3 et 4. Actuellement, dans le soleil, plus de 500 millions de tonnes d'hydrogène fusionnent chaque seconde pour donner de l'hélium. Une petite partie, environ 0,7%, est convertie en énergie.

Ces deux éléments, hydrogène et hélium, constituent respectivement 71% et 27% de la masse du système solaire, soit au total 98% de celle-ci. C'est dire leur importance.

Lorsque l'hydrogène a été consommé, l'étoile se contracte et il se forme des atomes plus lourds comme le carbone, l'azote et l'oxygène à partir du béryllium. Puis, dans un second temps, le fluor et le néon à partir du carbone et de l'oxygène et enfin les éléments suivants jusqu'au fer.

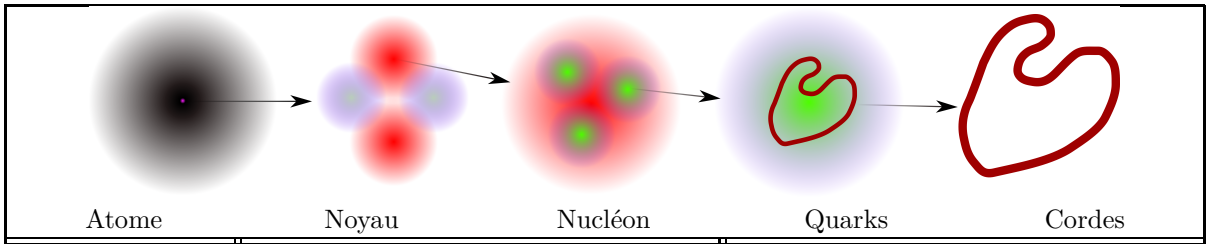
Dans certaines étoiles (les géantes rouges par exemple) la création des éléments encore plus lourds ne se fait plus par fusion. En effet, la répulsion électrique entre les noyaux qui devraient fusionner devient si importante en raison du nombre élevé de protons qu'ils ne fusionnent plus. Par contre, ils s'entourent progressivement de neutrons (produits de la fusion des éléments précédents) qui ne sont pas repoussés par la force électrique et grossissent tellement qu'ils deviennent instables. Alors certains neutrons se transforment par désintégration en protons créant ainsi de nouveaux éléments plus lourds que le fer.

Lors de l'explosion d'une étoile, phénomène appelé supernovæ (voir la figure 1.20), se forment les éléments plus lourds que le carbone, l'azote et l'oxygène et cela jusqu'au fer, atome si stable que les conditions d'une telle explosion ne suffisent même pas à former des éléments plus lourds. Puis, comme précédemment, les éléments plus lourds sont aussi formés par désintégration des neutrons insensibles à la force électrique qui se sont liés au fer.

Dans le gaz interstellaire enfin, se forment les trois éléments légers particuliers que sont le lithium, le béryllium et le bore par fission du carbone, de l'azote et de l'oxygène.

Mais la physique ne s'arrête pas là dans sa description de l'infiniment petit. Elle s'intéresse encore à d'autres objets extraordinaires. En effet, si les mouvements des atomes peuvent encore facilement être représentés en termes de trajectoire, ceux de leurs composants sont bien plus étranges. Car on peut autant les voir comme de petites particules (et, à l'origine, cela à donné lieu à un modèle de l'atome dit de Bohr (voir fig. 1.21) où les électrons orbitaient autour du noyau, comme les pla-

Table 1.1 – *Tableau des particules élémentaires*
Beaucoup de diversité



	Leptons		Quarks	
Fermions Ce sont les particules qui constituent la matière ordinaire	Électron (e^-) Il détermine les propriétés chimiques. Chargé négativement.	Neutrino (ν_e) électronique Très faible interaction avec la matière. Sans charge.	Bas (d) 1x dans le proton, 2x dans le neutron.	Haut (u) 2x dans le proton, 1x dans le neutron
Particules du big bang, présentes dans les rayons cosmiques ou les accélérateurs	Muon (μ^-) Un électron plus massif	Neutrino muonique (ν_μ) Un autre neutrino	Étrange (s) Un bas plus massif	Charme (c) Un haut plus massif
	Tau (τ) Un muon plus massif	Neutrino tauique (ν_τ) Un autre neutrino	Beauté (b) Un étrange plus massif	Vérité ou Top (t) Un haut encore plus massif
Bosons Particules représentant les forces élémentaires	Photon (γ) Grain de lumière ; vecteur de la force électromagnétique	Gluon (g) Cohésion du noyau et des nucléons ; vecteur de la force forte	Bosons (W Z) intermédiaires Radioactivité ; vecteur de la force faible	Graviton Poids : vecteur de la force de gravitation

nètes autour du soleil) que comme des « choses » infiniment étendues que l'on appelle ondes. Cette dualité du mode d'existence des particules élémentaires comme les électrons, les protons, les neutrons et bien d'autres encore traduit l'existence d'un objet physique bien particulier, *le quanton*, et présente des difficultés d'analyse de son mouvement. Au niveau des « trajectoires » électroniques, par exemple, on constate que certaines orbitales semblent passer par le noyau (voir fig. 1.23). En outre, celles-ci ne peuvent être précisément représentées comme l'orbite d'une planète pourrait l'être. En fait, elles ne sont même pas des surfaces, mais plutôt des zones étendues de l'espace dans lesquelles la probabilité de trouver un électron est importante (voir fig. 1.22). Car, à cette échelle, on ne peut plus décrire la position de l'électron que par une probabilité de présence. En effet, un principe d'indétermination [c],

c. Le terme d'indétermination est préférable à celui d'in-

Figure 1.22 – *L'atome : onde de probabilité*
Une image bien plus complexe[23]

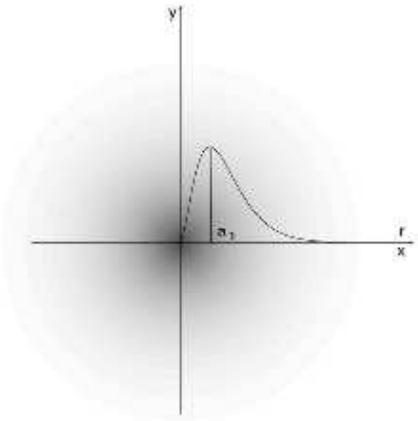
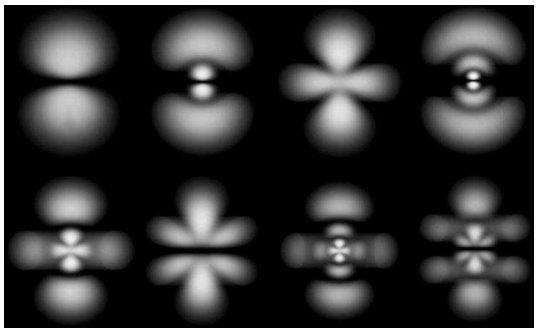


Figure 1.23 – *L'orbitale : onde de probabilité*
Une autre image complexe[24]



dit de Heisenberg, règle la relation entre leur position et leur vitesse. Celui-ci exprime la constatation que si l'on connaît parfaitement la position d'un tel objet, alors sa vitesse ne peut nous être que totalement inconnue. Et inversement, si sa vitesse est parfaitement déterminée, alors on ne peut savoir où est l'objet. Ainsi, au niveau microscopique, la notion même de mouvement n'est pas claire, ou plutôt est bien plus complexe que celle que nous rencontrons dans la vie quotidienne.

> *« Il n'y a pour les quantons plus de mouvement au sens d'une trajectoire, comme celle que suit une particule classique. Puisqu'un quanton possède une spatialité continue, a une extension spatiale indéfinie, son mode d'évolution temporelle est plus proche de la propagation des ondes que du mouvement des corpuscules. Il faut donc ici rompre avec le projet cartésien qui était de décrire le monde « par figures et mouvements ». Plus de figures, plus de mouvement, mais d'autres caractérisations, bien sûr, qui ne correspondent pas à nos intuitions immédiates et à nos pratique communes – ce sont de nouvelles notions que les théories physiques font émerger de l'expérience du monde quantique. »*
> (Lévy-Leblond, 2006, p. 33)

Ce monde étrange et fascinant de la physique de l'infiniment petit ne s'arrête pas à la dualité onde-corpuscule. La recherche des composants ultimes de la matière a de tout temps relevé du domaine de la physique. Avec l'atome, un pas important a été franchi. Mais il existe plus de 92 types d'atomes qui ont chacun leurs propriétés spécifiques. Naturellement donc on s'est intéressé à sa composition. Ce qui permit de découvrir les électrons, les protons et les neutrons. Ainsi, d'élémentaire, l'atome est passé au rang de structure complexe. Mais, comme on peut aussi le voir dans le tableau 1.1, il existe encore beaucoup d'autres particules qui composent le monde subatomique.

On peut y voir que l'ensemble des particules se décompose en deux catégories essentielles : les fermions et les bosons. Les premiers forment la matière et les seconds expliquent la nature des forces fondamentales.

- Les fermions Cette catégorie se compose elle-même de deux groupes : les leptons et les quarks. Les quarks sont les constituants des nucléons (composants du noyau) : protons et neutrons. Chaque nucléon est composé de trois quarks. Les leptons quant à eux doivent être considérés individuellement à l'instar de l'électron et du neutrino électronique.
- Les bosons Sorte de messagers des interactions élémentaires, ils permettent de comprendre comment se réalisent les actions entre les corps. Ces actions sont des forces, comme la force de frottement, la force de gravitation, la force d'un ressort... qui ont toutes pour origine une des quatre interactions fondamentales à laquelle correspond chaque fois un type de particule véhiculant cette force :

certitude, communément attribué au principe de Heisenberg, qui laisse penser que l'indétermination est uniquement due à la mauvaise qualité de nos instruments de mesure et non à la caractéristique fondamentale des quantons de ne pas être localisés.

Électromagnétique ↔ Le photon
Faible ↔ Un boson intermédiaire
Forte ↔ Le gluon
De gravitation ↔ Le graviton ?

Il faut noter que le graviton est encore hypothétique.

Finalement, il faut encore parler des particules très particulières formant l'antimatière. On sait de nos jours produire et stocker pendant une courte période (quelques jours [d]) ce type de particules qui interagissent fortement avec la matière ordinaire en disparaissant totalement au profit de lumière. Ce sont des particules qui ont des propriétés inverses des particules de la matière ordinaire. Par exemple, un positron, qui est un anti-électron, a la même masse qu'un électron, mais une charge opposée. Ces particules n'existent pas sur terre ailleurs que dans les accélérateurs de particules où elles sont produites par la collision d'autres particules. Mais on peut envisager qu'il en existe beaucoup ailleurs dans l'univers. Cette question reste cependant débattue.

Conclusion

On peut maintenant mieux comprendre pourquoi la compréhension du mouvement est l'un des premiers objectifs du physicien et pourquoi la science qui permet de prévoir le « destin » des objets, la mécanique, commence par une description des mouvements les plus simples : la cinématique.

d. On crée des anti-protons dans un accélérateur de particules comme le CERN à Genève, on les ralentit et on les piège dans un champ électromagnétique. Voici à ce sujet un commentaire de M. Carlo RUBBIA (Prix Nobel de Physique 1984) :

> « *L'antimatière est, comme vous l'avez vu, produite au CERN où une véritable usine de production a été construite. Nous utilisons des protons qui sont accélérés et viennent frapper une cible. Au cours des collisions, il y a production d'un grand nombre de particules ou d'antiparticules et, parmi elles, on trouve des antiprotons. Ces antiprotons sont stockés dans une bouteille magnétique qui, dans le cas particulier, est un anneau de stockage à accumulation. On obtient ainsi une quantité d'antimatière qui n'est pas très petite puisqu'elle atteint un microgramme par jour.* » [25]

Chapitre 2

La cinématique

2.1 Introduction

La cinématique est la science de la description du mouvement. L'origine du mot, kinêma, le mouvement, est la même que celle du mot cinéma. Il s'agit de rendre compte des différentes manières de décrire précisément le mouvement d'un corps dans l'espace. Cette description n'implique pas la détermination des causes du mouvement. Celles-ci seront introduites au chapitre 3 consacré à la dynamique.

2.2 Position

2.2.1 Dimensions

Une dimension On dira du mouvement d'un système physique qu'il est unidimensionnel ou en une dimension quand il se fait selon une droite.

Deux dimensions On dira du mouvement d'un système qu'il est bidimensionnel ou en deux dimensions quand il se fait dans un plan.

Trois dimensions On dira du mouvement d'un système qu'il est tridimensionnel ou en trois dimensions quand il se fait dans l'espace.

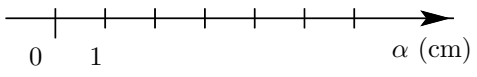
2.2.2 Système d'axes

Nous allons ici, pour plus de facilité, nous limiter aux mouvements unidimensionnels. La généralisation en deux dimensions est naturelle pour des systèmes d'axes et de coordonnées cartésiens. Nous ne verrons pas d'autre type de système d'axes. Par contre, vous trouverez en annexe B deux autres systèmes de coordonnées : circulaires (bidimensionnel) et sphérique (tridimensionnel). Ils sont assez simples pour être compris sans difficultés.

L'utilisation de plusieurs dimensions implique la transformation des grandeurs scalaires utilisées par la suite en grandeurs vectorielles. Présentée ici comme une grandeur scalaire, la vitesse par exemple est en fait un vecteur. Pourtant, par souci de simplicité, quand ce n'est pas absolument nécessaire, seules les grandeurs scalaires seront utilisées. Le passage aux grandeurs vectorielles est cependant simplement réalisé en plaçant une petite flèche au-dessus des grandeurs à caractère vectoriel. On peut alors considérer les définitions et relations mathématiques concernées comme vectorielles.

Un système d'axes unidimensionnel est donc une droite orientée (munie d'un sens), c'est-à-dire une flèche, munie d'une origine notée 0. On y ajoute généralement une unité de longueur notée 1 et des graduations, multiples de cette unité. On la représente comme indiqué à la figure 2.1 et on la nomme généralement x.

Figure 2.1 – *Un système d'axes en une dimension*

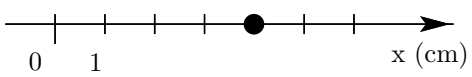


2.2.3 Position

La position d'un objet un nombre muni d'une dimension, c'est-à-dire d'une unité. Elle correspond simplement à la valeur indiquée en regard du point

coïncidant sur l'axe avec le lieu où se trouve l'objet. En une dimension elle est notée x et prend une valeur déterminée par le choix de l'origine et de l'unité. Considérons l'exemple de la figure 2.2.

Figure 2.2 – *La position d'un objet*



On écrira alors dans ce cas particulier que la position est $x = 4\,\text{cm}$.

Bien entendu, si l'objet se situe dans un plan, la position devient le vecteur position $\overrightarrow{r}$, repéré par deux coordonnées. Par exemple, on pourrait avoir :

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ cm}$$

2.2.4 Déplacement

Le déplacement, noté Δx est la différence entre les positions initiale et finale de l'objet. On peut donc écrire : $\Delta x = x_{final} - x_{initial} = x_f - x_i = x_2 - x_1$. En deux dimensions, x est simplement un vecteur.

2.2.5 Distance parcourue

Il ne faut pas confondre déplacement et distance parcourue. Si un objet part d'un point, parcourt une certaine distance et y revient, son déplacement est nul. Par contre sa distance parcourue, notée d, ne l'est pas.

2.3 Vitesse

2.3.1 Vitesse moyenne

La vitesse moyenne $\overline{v}$ d'un objet est donnée par :

$$\begin{aligned} \overline{v} &= \frac{déplacement}{temps} \\ &= \frac{position_{finale} - position_{initiale}}{temps} \end{aligned}$$

En d'autres termes :

$$\boxed{\overline{v} = \frac{d}{t} = \frac{x_f - x_i}{t} = \frac{\Delta x}{t}} \qquad (2.1)$$

Bien que la notation exacte pour la vitesse moyenne soit $\overline{v}$, la barre sur le v est souvent omise quand cela ne pose pas de problème de confusion avec la vitesse instantanée.

Les unités de la vitesse sont : $[v] = \text{m/s}$

En plusieurs dimensions, la définition de la vitesse est identique sauf que la notation vectorielle apparaît.

2.3.2 Exemples

Exemple 1

Un objet se déplace de $x = 3\,\text{m}$ à $x = 7\,\text{m}$ en $10\,\text{s}$. Quelle est sa vitesse moyenne ?

Réponse : $v = \frac{7-3}{10} = 0{,}4\,\text{m/s}$

Exemple 2

Un objet se déplace de $x = 30\,\text{km}$ à $x = 10\,\text{km}$ en une demi-heure. Calculez sa vitesse moyenne en km/h et en m/s.

Réponse :

$$\begin{aligned} v &= \frac{10 - 30}{0,5} = -40\,\text{km/h} \\ &= \frac{-40 \cdot 10^3}{60 \cdot 60} = -\frac{40 \cdot 10^3}{3,6 \cdot 10^3} = -\frac{40}{3,6} \\ &= -11{,}1\,\text{m/s} \end{aligned}$$

La vitesse est négative, donc l'objet recule ou se déplace dans le sens contraire de celui de l'axe.

2.3.3 Vitesse instantanée

La vitesse instantanée d'un objet est la vitesse qu'il a à un instant précis et non au cours d'un intervalle de temps donné. Cette vitesse est obtenue en raccourcissant l'intervalle de temps entre les deux mesures de position finale et initiale, jusqu'à ce que cet intervalle soit infiniment court, c'est-à-dire nul. On a alors la vitesse instantanée à ce moment précis. Ainsi on peut écrire formellement :

$$v_{instantannée} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

et on verra que cette opération mathématique de limite correspond à la notion de dérivée.

2.4 Accélération

2.4.1 Accélération moyenne

L'accélération moyenne $\overline{a}$ d'un objet est donnée par :

$$\overline{a} = \frac{v_{finale} - v_{initiale}}{temps} = \frac{v_2 - v_1}{t}$$

$$\boxed{\overline{a} = \frac{\Delta v}{t} = \frac{v_f - v_i}{t}} \qquad (2.2)$$

Bien que la notation exacte pour l'accélération moyenne soit $\overline{a}$, la barre sur le a est souvent omise quand cela ne pose pas de problème de confusion avec l'accélération instantanée.

Les unités de l'accélération sont $[a] = \mathrm{m/s^2}$.

En plusieurs dimensions, la définition de l'accélération est identique sauf que la notation vectorielle apparaît.

2.4.2 Exemples

Exemple 1

Un objet accélère de 0 à 100 km/h en 10 s. Quelle est son accélération ?

Réponse : attention, il faut que les unités du dénominateur (s) correspondent à celles du numérateur (km/h). On doit donc soit transformer des km/h en km/s, soit des secondes en heures :

- $100\,\mathrm{km/h} = 100/3600\,\mathrm{km/s} = 0{,}028\,\mathrm{km/s}$
  Ainsi, l'accélération vaut alors :
  $a = 0,028/10 = 0{,}0028\,\mathrm{km/s^2}$.
- $10\,\mathrm{s} = 10/3600 = 0{,}0028\,\mathrm{h}$
  Ainsi, l'accélération vaut alors :
  $a = 100/0,0028 = 36\ 000\,\mathrm{km/h^2}$.
- La solution la plus courante est d'exprimer toutes les grandeurs en unités du système international (voir annexe A), c'est-à-dire des mètres et des secondes.
  Ainsi on aurait :
  $100\,\mathrm{km/h} = 100/3,6 = 27{,}8\,\mathrm{m/s}$
  et l'accélération serait alors :
  $a = 27,8/10 = 2{,}78\,\mathrm{m/s^2}$.

Exemple 2

Un objet passe de 20 m/s à 36 km/h en 10 s. Quelle est son accélération ?

Réponse : $36\,\mathrm{km/h} = 36/3,6 = 10\,\mathrm{m/s}$.

Ainsi $a = (10 - 20)/10 = -1\,\mathrm{m/s^2}$.

L'accélération est négative. Cela signifie ici que l'objet freine. On parle alors d'un cas particulier d'accélération : la décélération.

Remarque :

Dans le calcul de l'accélération, il faut toujours tenir compte des vitesses avec leur signe. Ainsi, il est possible de concevoir un objet qui ne décélère pas et dont l'accélération est négative (voir exercices).

2.4.3 L'accélération instantanée

De la même manière que pour la vitesse instantanée, on peut définir l'accélération instantanée par :

$$a_{instantanée} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

2.5 Mouvements simples

2.5.1 Le mouvement rectiligne uniforme

Définition

Un objet est dit en mouvement rectiligne uniforme (MRU), s'il se déplace en ligne droite et à vitesse constante.

Propriétés

De la définition de la vitesse on tire :

$$v = v_o = \frac{x - x_o}{t} \;\Rightarrow\; v_o \cdot t = x - x_o$$
$$\Rightarrow\; x = v_o \cdot t + x_o$$

car la vitesse v au cours du temps ne change pas. Elle est donc la même à un instant t quelconque qu'à l'instant $t = 0\,\mathrm{s}$, moment où on la note v_o.

Ainsi, on peut écrire :

$$\boxed{x(t) = v_o \cdot t + x_o} \qquad (2.3)$$

Cette équation donne la position $x(t)$ d'un objet au cours du temps en fonction de sa vitesse v_o (constante), de l'instant t qu'on considère et de sa position initiale x_o. C'est une droite affine de pente v_o et d'ordonnée initiale x_o.

Figure 2.3 – *Apollo 16*
Rencontre du module de commande et du module lunaire d'Apollo 16 le 23 avril 1972[26].

Un exemple : Apollo en route vers la Lune

Il s'agit ici d'un exemple - contre-exemple, comme nous allons le voir par la suite. D'une manière très grossière, on peut décrire le mouvement d'une capsule Apollo en route vers la Lune en trois phases :

1. La fusée décolle et amène la capsule à une altitude de 370 km environ. Celle-ci est alors en orbite autour de la Terre.
2. On allume la propulsion pour la faire dégager de son orbite autour de la Terre. Elle se dirige alors vers la Lune.
3. Elle arrive à une altitude de 5700 km environ de la surface de la Lune. Là, elle est freinée (par des moteurs) pour être capturée par la Lune et pouvoir s'y poser.

Pendant la phase de transfert entre les orbites terrestre et lunaire, on peut faire l'hypothèse d'un MRU. Nous verrons par la suite la validité de cette hypothèse.

En utilisant les différentes grandeurs données ci-dessous, calculez la vitesse moyenne de la capsule Apollo 12 lors de son transfert vers la Lune.

Table 2.1 – *Données de la mission Apollo 12*

Grandeur	Valeur
Rayon de la Terre	6371 km
Altitude orbite terrestre	370 km
Date départ orbite terrestre	14 nov. 1969
Heure départ orbite terrestre	19 h 15
Distance Terre-Lune	$3{,}84 \cdot 10^8$ m
Altitude orbite lunaire	5700 km
Date arrivée orbite lunaire	18 nov. 1969
Heure arrivée orbite lunaire	6 h 10
Rayon de la Lune	$1{,}738 \cdot 10^6$ m

On a besoin des données[a] du tableau 2.1 :
Solution :
Le temps t de déplacement vaut :

$$\begin{aligned} t &= 4\,\text{h}\,45\,\text{min} + 3 \cdot 24\,\text{h} + 6\,\text{h}\,10\,\text{min} \\ &= 82\,\text{h}\,55\,\text{min} = 82{,}92\,\text{h} \end{aligned}$$

La distance d parcourue vaut :

$$\begin{aligned} d &= d_{Terre-Lune} - R_{Terre} - h_{orbite-Terre} \\ &\quad - R_{Lune} - h_{orbite-Lune} \\ &= 3,84 \cdot 10^5 - 6'371 - 370 \\ &\quad - 1,738 \cdot 10^3 - 5'700 = 369\ 821\,\text{km} \end{aligned}$$

La vitesse moyenne est donc de :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{369'821}{82,92} = 4460\,\text{km/h}$$

Remarques importantes :

En réalité le mouvement de la capsule est loin d'être un MRU. En effet, la Terre et la Lune exercent leurs attractions respectives. Ainsi, si la vitesse initiale de rotation de la capsule autour de la Terre était de 28 000 km/h, celle-ci était augmentée par la propulsion pour se dégager de la Terre jusqu'à une valeur de 38 000 km/h.

Ensuite, l'attraction de la terre freinait constamment le vaisseau. « Sa vitesse tombait ainsi à près de 5000 km/h au point d'équigravité (gravité équivalente entre la Terre et la Lune) qui se situe à environ 300 000 km de notre planète (sur une distance

a. Apollo en chiffres : http ://history.nasa.gov/SP-4029/contents.htm

Figure 2.4 – *Collision Andromède-Voie Lactée*
Rencontre, vue depuis la Terre, d'Andromède et de la Voie Lactée. Vue d'artiste[28].

moyenne Terre-Lune de 380 000 km), pour accélérer à nouveau compte tenu de l'attraction lunaire. Au voisinage de notre satellite, le vaisseau Apollo arrivait à une vitesse de 8000 km/h, mais encore bien trop rapide pour devenir captif de la gravité lunaire. Aussi, l'engin devait effectuer une rotation de 180° (l'arrière vers l'avant) puis, grâce à la mise à feu du propulseur auxiliaire libérant une poussée de 10 tonnes (pendant 4 minutes et demie), ralentissait juste ce qu'il fallait pour être pris dans le champ de la gravité lunaire. » [27]

On voit ainsi que le mouvement des engins spatiaux est loin d'être un mouvement aussi simple qu'on pourrait le penser étant donné le vide dans lequel ils se trouvent. En particulier, il est loin d'être rectiligne et de se faire à vitesse constante.

Bien entendu, ce mouvement devait être parfaitement connu pour pouvoir amener des hommes sur la Lune. Nous verrons dans le chapitre suivant (paragraphe 3.2) qu'en réalité ce mouvement peut être assez facilement déterminé grâce à la loi de la gravitation universelle de Newton.

Autre exemple : le déplacement d'Andromède

Contrairement à la plupart des galaxies qui s'éloignent de nous en raison de l'expansion de l'univers, celle d'Andromède (ainsi que celles du groupe local) se rapproche de nous.

A l'aide des données ci-dessous, calculez dans combien d'années elle rencontrera notre galaxie, la Voie Lactée (voir la figure 2.4).

Vitesse d'approche :	500 000 km/h
Position initiale :	$2{,}55 \cdot 10^6$ AL
Vitesse de la lumière :	300 000 km/s

Il existe plusieurs manières de résoudre ce problème. En voici une. On commence par déterminer la vitesse d'Andromède en AL/an. Pour cela, on commence par l'exprimer en km an :

$$\begin{aligned} 500\,000\,\text{km/h} &= 5 \cdot 10^5 \cdot 24 \cdot 365 \\ &= 4{,}38 \cdot 10^9\,\text{km/an} \end{aligned}$$

Puis, on traduit ces km en AL à l'aide de :

$$\begin{aligned} 1\,\text{AL} &= 300'000 \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365 \\ &= 9{,}4608 \cdot 10^{12}\,\text{km} \end{aligned}$$

Ce qui permet d'obtenir la vitesse recherchée :

$$\begin{aligned} v &= 4{,}38 \cdot 10^9\,\text{km/an} = 4,38 \cdot 10^9 / 9,4608 \cdot 10^{12} \\ &= 4{,}63 \cdot 10^{-4}\,\text{AL/an} \end{aligned}$$

Enfin, considérant qu'on peut faire l'hypothèse d'un mouvement à vitesse constante, on a alors :

$$t = 2,55 \cdot 10^6 / 4,63 \cdot 10^{-4} = 5{,}5 \cdot 10^9\,\text{ans}$$

Ce qui correspond à 5,5 milliards d'années.

Mais en réalité, plus Andromède se rapprochera de la Voie Lactée, plus sa vitesse augmentera. Ainsi, le mouvement ne se fait pas à vitesse constante et le temps avant la rencontre sera plus petit : **3 milliards d'années**.

2.5.2 Mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA)

Définition

Un objet est dit en mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA), s'il se déplace en ligne droite et avec une accélération constante.

Propriétés

On montre (voir annexe F.1) que pour un MRUA, on a :

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2} \cdot a_o \cdot t^2 + v_o \cdot t + x_o} \qquad (2.4)$$

où $x(t)$ est la position de l'objet au cours du temps, a_o son accélération initiale (et donc son accélération tout court), v_o sa vitesse initiale, x_o sa position initiale et t l'instant qu'on considère.

Par définition de l'accélération, on a aussi :

$$a = a_o = \frac{v - v_o}{t} \Rightarrow a_o \cdot t = v - v_o$$
$$\Rightarrow v = a_o \cdot t + v_o$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\boxed{v(t) = a_o \cdot t + v_o} \tag{2.5}$$

Comme on le voit, la vitesse au cours du temps est une droite affine de pente a_o et d'ordonnée initiale v_o. D'autre part, la position au cours du temps est une parabole (en t^2).

Finalement, on peut constater que le MRU n'est qu'un cas particulier de MRUA. En effet, il suffit de poser $a_o = 0$ dans les équations du MRUA pour retrouver celle du MRU.

2.5.3 La chute libre

Historiquement, le problème de la chute libre fut résolu dans le cadre de la remise en question des théories d'Aristote (voir paragraphe 3.1.3). Disons, en substance, que ce problème fut la première pierre de l'édifice théorique qui permit de réunifier deux mondes dont la séparation par Platon fut reprise par Aristote : le monde sublunaire (en dessous de la Lune) et le monde supralunaire (en dessus de la Lune). Pour Aristote, la physique dans ces deux mondes n'obéissait pas aux mêmes lois. Or, on va voir que les propriétés de la chute libre à la surface de la Terre sont les mêmes que celles de la « chute » de la Lune sur la Terre. Cette découverte mena à la réfutation totale de la théorie d'Aristote et permit aux physiciens la prétention extraordinaire de pouvoir décrire tout l'univers avec les mêmes lois. La résolution du problème de la chute libre fut donc un évènement très important, pour ne pas dire essentiel, dans l'histoire de la physique, même s'il paraît aujourd'hui d'une moindre importance. Par ailleurs, comme il est un exemple idéal de par sa simplicité et ses facilités expérimentales pour la présentation de la notion d'accélération, il mérite d'être étudié attentivement.

Table 2.2 – *La hauteur en fonction du temps*

i	h_i (m)	t_i (s)
1	0,1	0,1428
2	0,2	0,2019
3	0,3	0,2473
4	0,4	0,2856
5	0,5	0,3193
6	0,6	0,3497
7	0,7	0,3778
8	0,8	0,4039
9	0,9	0,4284

Définition La chute d'un objet est dite libre quand elle se fait en l'absence totale de tout frottement. Un bon exemple est donné par la chute d'un objet à la surface de la Lune (qui est sans atmosphère). On peut aussi considérer la chute d'un objet dans un tube à vide. Ou encore tout simplement la chute d'un objet à la surface de la Terre, pour autant qu'elle ne dépasse pas quelques mètres. Dans ces conditions, en effet, le frottement est assez faible pour être négligé.

Propriétés On montre alors que la chute libre d'un objet ne dépend pas de sa masse. Cela signifie que deux objets en chute libre, comme un marteau et une plume tomberont exactement de la même manière (voir vidéo et tube à vide). D'autre part, dans les conditions d'une chute de faible hauteur, l'accélération a une autre propriété importante. Mais pour la déterminer, il faut réaliser l'expérience suivante :

Expérience On lâche une petite bille d'une hauteur connue et on mesure son temps de chute.

Le tableau 2.2 donne les résultats obtenus.

Calculs A partir des mesures brutes du tableau 2.2, on calcule les vitesses moyennes correspondant à chaque intervalle de temps, ainsi que les temps moyens correspondants :

$$t_{moyen} = \frac{t_{i+1} + t_i}{2} \text{ et } v_{moyenne} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h_{i+1} - h_i}{t_{i+1} - t_i}$$

On peut ainsi remplir le tableau 2.3.

Galilée ou Galileo Galilei(1564-1642)

Galilée est parfois considéré comme le père de la physique moderne en ce qu'il fut expérimentateur. Il étudia la chute des corps sur un plan incliné :

> « *Plaçant alors l'appareil dans une position inclinée, en élevant l'une de ses extrémités d'une coudée ou deux au-dessus de l'horizon, nous laissions, comme je l'ai dit, descendre la boule dans le canal, en notant [. . .] le temps nécessaire à une descente complète. [. . .] La mise en place et cette première mesure accomplies, nous faisions descendre la même boule sur le quart du canal seulement : le temps mesuré était toujours rigoureusement égal à la moitié du temps précédent. Nous faisions ensuite varier l'expérience, en comparant le temps requis pour parcourir la longueur entière du canal avec le temps requis pour parcourir sa moitié, ou les deux tiers, ou les trois quarts, ou tout autre fraction ; dans ces expériences répétées une bonne centaine de fois, nous avons toujours trouvé que les espaces parcourus étaient entre eux comme les carrés des temps, et cela quelle que soit l'inclinaison du plan, c'est-à-dire du canal.* »
>
> (Hawking, 2003, Galilée - 1638 - Dans « Discours et démonstrations mathématiques sur deux nouvelles sciences », p. 200.)

On peut considérer Galilée comme le « père » de l'équation horaire de la position d'un objet en chute libre. Le théorème II proposition II des « Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles » dit :

> « *Si un mobile, partant du repos, tombe avec un mouvement uniformément accéléré, les espaces parcourus en des temps quelconques par ce même mobile sont entre eux en raison double des temps, c'est-à-dire comme les carrés de ces mêmes temps.* »
>
> (Hawking, 2003, Galilée - 1638 - Dans « Discours et démonstrations mathématiques sur deux nouvelles sciences », p. 197.)

Portrait de Galilée tiré de Wikipedia[29]

Table 2.3 – *La vitesse en fonction du temps*

i	t_{moyen} (s)	$v_{moyenne}$ (m/s)
1-2	0,1724	1,6920
2-3	0,2246	2,2026
3-4	0,2665	2,6110
4-5	0,3025	2,9674
5-6	0,3345	3,2895
6-7	0,3638	3,5587
7-8	0,3909	3,8314
8-9	0,4162	4,0816

A partir des résultats des tableaux 2.2 et 2.3, on construit les graphes horaires (le temps est toujours placé sur l'axe des x) suivants : hauteur en fonction du temps (h vs t : figure 2.5) et vitesse en fonction du temps moyen (v vs t : figure 2.6) [b].

Analyse des résultats Commençons par analyser le graphe de la figure 2.6, plus particulièrement celui de la vitesse en fonction du temps. Il correspond à une droite linéaire. Cela signifie que la vitesse augmente toujours de la même manière, c'est-à-dire que pour un intervalle de temps donné l'augmentation de vitesse est toujours la même ou encore que l'accélération est constante. Bien évidemment cette dernière n'est autre que la pente du graphe puisqu'elle s'exprime comme le rapport

b. vs signifie « versus » c'est-à-dire « en fonction de » en latin.

Figure 2.5 – *Chute libre*

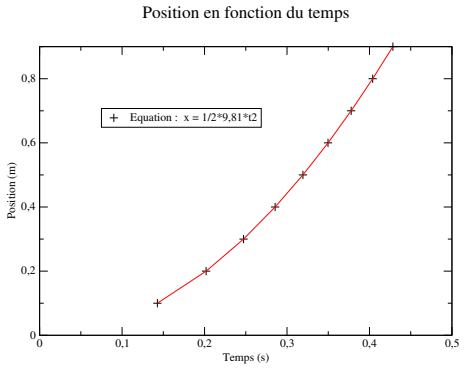
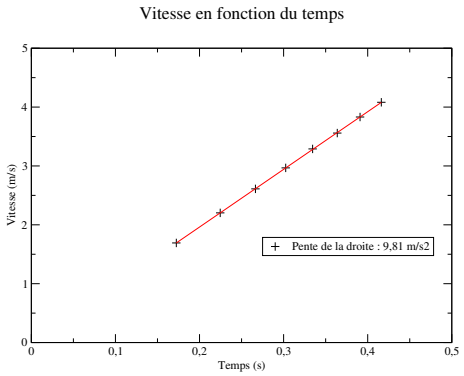


Figure 2.6 – *Chute libre*



d'une différence de vitesse par une différence de temps. Comme précisé sur le graphe, la pente vaut $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Le mouvement est donc rectiligne uniformément accéléré. Son accélération est appelée accélération terrestre et notée g.

En ce qui concerne le graphe de la figure 2.5, plus précisément celui de la position en fonction du temps, on constate clairement la parabole correspondant à un MRUA. L'expression générale permet donc aussi de calculer la valeur de l'accélération terrestre en multipliant le cœfficient devant le t^2 par deux, puisque pour une MRUA on a $x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$. On retrouve alors bien la valeur de $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

Conclusions La chute libre est un mouvement rectiligne uniformément accéléré. Son accélération est dite accélération terrestre, notée g et vaut $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

2.5.4 Balistique

Jusqu'à présent, pour la chute libre, le mouvement se déroulait en une dimension. Dans le cas de mouvements dits « balistiques », le mouvement se fait dans un plan. Les exemples typiques de ce type de mouvement sont ceux d'un obus de canon, d'une balle de fusil, d'une balle de football, etc.

Définition En réalité les mouvements donnés en exemple ci-dessus sont plus complexes que le mouvement simple dit « balistique ».

Le mouvement d'un objet est dit « balistique », si la seule force qui s'exerce sur lui est son poids. Il se déroule donc sans frottement et se fait dans un plan.

Propriétés La conséquence du fait que seul le poids intervient dans ce mouvement est qu'on peut le décomposer en deux mouvements simples : horizontalement, le mouvement est un MRU et verticalement, un MRUA d'accélération $a = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. En effet, en l'absence de frottement seul le poids agissant verticalement peut produire une accélération.

Remarquons que cela implique qu'un objet lancé horizontalement (sans aucune vitesse verticale) depuis le haut du pont du Gard, par exemple, tombera en même temps qu'un autre simplement lâché du même endroit. Pratiquement cela signifie qu'ils arriveront exactement au même moment au sol.

Équations On peut ainsi écrire, horizontalement (sur l'axe x) :

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{xo} \cdot t + x_o && (2.6)\\ v_x(t) &= v_{xo} && (2.7)\\ a_x(t) &= 0 && (2.8) \end{aligned}$$

On peut aussi écrire, verticalement (sur un axe y pointant vers le bas !) :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_{yo} \cdot t + y_o && (2.9)\\ v_y(t) &= g \cdot t + v_{yo} && (2.10)\\ a_y(t) &= g && (2.11) \end{aligned}$$

Ce sont là les équations de base du mouvement balistique. Remarquez que l'accélération $g =$

$9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ est l'accélération terrestre pour autant que le mouvement se fasse à la surface de la terre.

Notez aussi que le signe positif de l'accélération vient du fait que l'axe y choisi pointe vers le bas. Le signe de la vitesse v_{yo} doit alors aussi être choisi de la même manière, c'est-à-dire positif si celle-ci pointe vers le bas. Si on choisit de faire pointer l'axe y vers le haut, alors l'accélération devient négative, de même que la vitesse si elle pointe vers le bas.

Enfin, on utilise souvent la notation simplifiée :

$$h = y - y_o = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_{yo} \cdot t$$

en omettant $y - y_o$, ce qui permet de relier directement la hauteur au temps.

Premier exemple On lance un caillou du haut du pont du Gard avec une vitesse horizontale de $1\,\mathrm{m/s}$. Il arrive au sol à une distance de $3{,}16\,\mathrm{m}$ du pied de l'endroit où il a été lancé. Quelle est la hauteur du pont du Gard ?

Réponse :

— Le mouvement horizontal est un MRU de vitesse $v = 1\,\mathrm{m/s}$. Ainsi, le temps mis par le caillou pour parcourir horizontalement les $3{,}16\,\mathrm{m}$ est de $3{,}16\,\mathrm{secondes}$.

— Or, c'est dans ce même temps (le temps de vol) que le caillou a parcouru verticalement la hauteur du pont. Verticalement, le mouvement étant un MRUA, on peut écrire :

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 0,5 \cdot 9,81 \cdot 3,16^2 = 49\,\mathrm{m}$$

Second exemple Considérons le problème suivant :

Un plongeur court horizontalement sur la plateforme d'un plongeoir haut de 10 m. Arrivé à l'extrémité avec une vitesse horizontale de $2\,\mathrm{m/s}$, il saute. Calculez la distance horizontale à partir du pied de l'extrémité du plongeoir à laquelle le plongeur arrive dans l'eau.

Réponse :

— Le temps de chute est donné par :
$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = 1{,}4\,\mathrm{s}$,
si on arrondit g à $10\,\mathrm{m/s^2}$.

— La distance horizontale parcourue est alors :
$x = v_o \cdot t = 2 \cdot 1,4 = 2{,}8\,\mathrm{m}$.

2.5.5 La chute libre ... de la Lune

La question est ici de savoir pourquoi la lune « tient » au-dessus de notre tête.

La réponse d'Aristote était qu'il est naturel pour un objet du monde supralunaire (dont la Lune fait partie) de suivre le type de mouvement propre à ces objets divins : un mouvement circulaire. Un tel objet n'est en effet pas soumis à la même physique que les objets du monde sublunaire, ceux qui se déplacent à la surface de la Terre. La Lune ne tombe donc pas sur la Terre.

Pour les physiciens actuels, la même physique doit être valable dans tout l'Univers. Ainsi, la Lune, comme un autre objet à la surface de la Terre, est soumise à son poids, c'est-à-dire à l'attraction de la Terre. Elle devrait donc tomber sur celle-ci. Or, manifestement, elle ne le fait pas. Cela signifie-t-il alors que son poids est nul ? Si on considère que la Lune est un objet comme un autre, cela ne peut être le cas. Comment donc expliquer que la Lune ne tombe pas ?

On pourrait répondre à cette question en admettant, même si cela paraît paradoxal, qu'en réalité elle tombe. L'idée est la suivante : supposons qu'on lance un objet horizontalement un peu au-dessus de la surface de la Terre. Appelons v la vitesse horizontale initiale. Si v est nulle, l'objet tombe en chute libre. Si v est non nulle, mais petite, l'objet est en mouvement balistique et il tombe sur la terre quelques mètres plus loin. Plus v est grande, plus la distance qu'il parcourt à la surface de la Terre est grande. Si la vitesse est assez grande, l'objet semble suivre la courbure de la Terre, tout en tombant petit à petit jusqu'à sa surface. A la limite, pour une vitesse donnée, l'objet tombe « en même temps » que la courbure de la Terre voit « descendre » sa surface (cf. figure 2.7). C'est alors comme s'il la ratait en permanence. Ainsi, il peut tomber sur la Terre tout en tournant autour d'elle. La figure 2.8 présente l'illustration[30] utilisée par Newton dans les principia de 1728 pour expliquer la chute de la lune[c] (voir aussi page 63).

De façon plus détaillée, mais partiellement inexacte comme nous le verrons plus tard, on pourrait

c. Avec mes plus vifs remerciements à Emilio Segrè Visual Archives pour son autorisation de reproduire ici cette magnifique illustration de Newton tirée des Principia de 1728 présentant la relation entre chute et satellisation. On la trouve aussi dans (Lindemann, 1999, p. 164).

Figure 2.7 – *L'idée de la chute de la Lune*

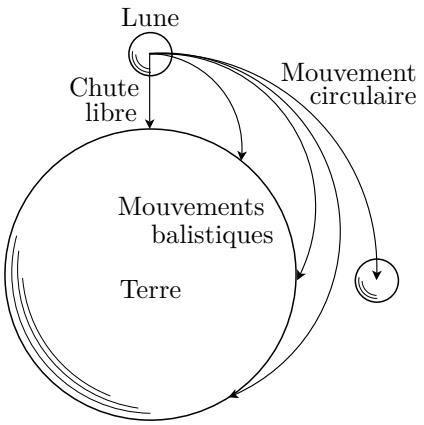
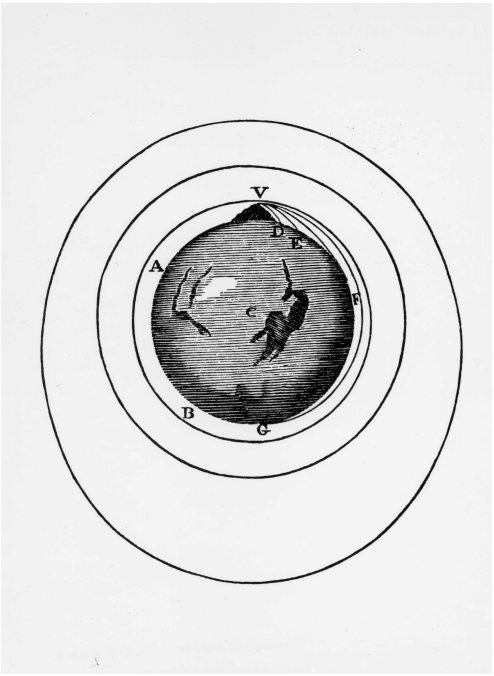


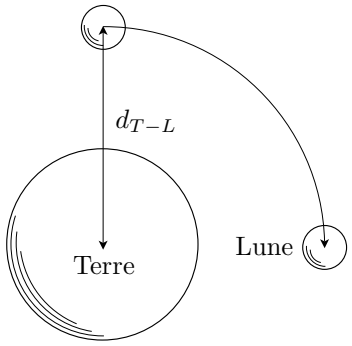
Figure 2.8 – *L'idée de la chute de la Lune Illustration des Principia.*



dire que la Lune tombe sur la Terre d'une hauteur égale à la distance Terre-Lune en un quart de la période de rotation de la Lune autour de la Terre (cf. figure 2.9).

De cette manière, on peut calculer la valeur de l'accélération que devrait avoir la Lune dans sa chute sur la Terre pour « tomber » d'un quart de tour. Très grossièrement, en confondant la chute de la Lune avec un simple mouvement balistique dont la composante verticale est un MRUA, on pourrait en effet écrire :

Figure 2.9 – *Chute de la Lune sur la Terre*



$$h = d_{Terre-Lune} = \frac{1}{2}a \cdot t^2 = \frac{1}{2}a \cdot \left(\frac{T}{4}\right)^2$$

où T est la période de rotation de la Lune autour de la Terre. Ainsi :

$$\begin{aligned} a &= \frac{32 \cdot d_{t-l}}{T^2} = \frac{32 \cdot 3,84404 \cdot 10^8}{(30 \cdot 24 \cdot 3600)^2} \\ &= 1,83 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

Cette valeur est du bon ordre de grandeur puisqu'en réalité l'accélération de la Lune vers la Terre vaut :

$$a = 2,7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$$

Bien entendu, ces deux valeurs sont néanmoins assez différentes. Cependant, étant donné les hypothèses très grossières qui ont été faites, obtenir un bon ordre de grandeur est un résultat remarquable. En effet, on a considéré que le mouvement était balistique, c'est-à-dire qu'à tout instant la direction dans laquelle la Lune tombe est la même. Or, étant donné la courbure de la Terre, sur un quart de période, cette direction varie de 90°. En réalité donc, le mouvement n'est pas balistique, mais central, c'est-à-dire que la chute de la Lune se fait toujours vers un même point. Ainsi, le mouvement réel de la Lune ne se fait pas sur une parabole, comme dans le cas d'un mouvement balistique, mais sur une ellipse (très proche d'un cercle). L'annexe G

présente un calcul plus correct de l'accélération de la Lune basé sur une orbite circulaire. Il permet aussi d'en déduire la forme de la force de gravitation donnée par la loi de la gravitation universelle (voir paragraphe 3.2.3) qui est inversement proportionnelle au carré de la distance à la Lune. Ce calcul est néanmoins encore une approximation puisque l'orbite n'est pas circulaire mais elliptique.

Quoi qu'il en soit, l'idée que la Lune tombe en permanence sur la Terre peut parfaitement expliquer qu'elle tienne apparemment en apesanteur audessus de notre tête, pour autant qu'elle soit animée d'une vitesse non nulle parallèle à la surface de la Terre, que celle-ci ait une valeur bien précise et, bien entendu, qu'elle ne soit soumise à aucun frottement.

Nous verrons au prochain chapitre (paragraphe 3.2) avec la dynamique de Newton (sa théorie du mouvement) et sa loi de la gravitation universelle (paragraphe 3.2.3), que le mouvement des objets en rotation autour de la Terre, comme la lune, mais aussi comme les satellites artificiels, est parfaitement expliqué par l'idée de la chute d'objets à vitesse initiale tangentielle non nulle.

Remarquons enfin que cette idée a été remise en question par Einstein dans sa théorie de la relativité générale. Celui-ci revient en effet à l'idée d'un mouvement « naturel » sans contrainte, sans attraction par la Terre, dans un espace courbe.

2.5.6 Mouvement circulaire uniforme (MCU)

La cinématique du mouvement circulaire uniforme est identique à celle du MRU si on remplace les distances par des angles. Ainsi, en guise de position, on prendra l'angle des coordonnées circulaires (voir figure B.1). A partir de là, la vitesse $\overline{v}$ et l'accélération angulaires $\overline{a}$ moyennes (on écrit aussi généralement simplement v et a) se définissent très simplement :

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow \theta(t) \\ \overline{v}(t) &\rightarrow \overline{\omega}(t) = \frac{\theta - \theta_o}{t - t_o} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \\ \overline{a}(t) &\rightarrow \overline{\alpha}(t) = \frac{\omega - \omega_o}{t - t_o} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \end{aligned}$$

Bien entendu, on a aussi pour les grandeurs instantanées :

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

Ces définitions sont valables pour tout mouvement circulaire, en particulier s'il n'est pas uniforme. Dans le cas d'un MCU, on a les deux conditions suivantes en plus :

$$\omega(t) = \omega_o \text{ et } \alpha(t) = 0\,\mathrm{m/s^2}$$

Par ailleurs, la relation liant le rayon d'un arc de cercle à sa longueur, relation traduite dans la figure A.1, permet de relier les grandeurs linéaires ($x(t)$, $v(t)$) et celles qui sont angulaires ($\theta(t)$, $\omega(t)$) :

$$\boxed{L = \theta \cdot R} \tag{2.12}$$

implique, par dérivation :

$$v = \frac{dL}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot R = \omega \cdot R \Rightarrow$$

$$\boxed{v = \omega \cdot R} \tag{2.13}$$

Relation importante

La complexité de la dynamique de ce mouvement tient dans son caractère bidimensionnel. En d'autres termes, il est nécessaire de tenir compte du caractère vectoriel de la vitesse (voir figure 2.10).

Ainsi, la rotation du vecteur vitesse « produit » un vecteur $\Delta\overrightarrow{v}$. Or, par définition de l'accélération :

$$\overrightarrow{a} = \frac{\Delta\overrightarrow{v}}{\Delta t}$$

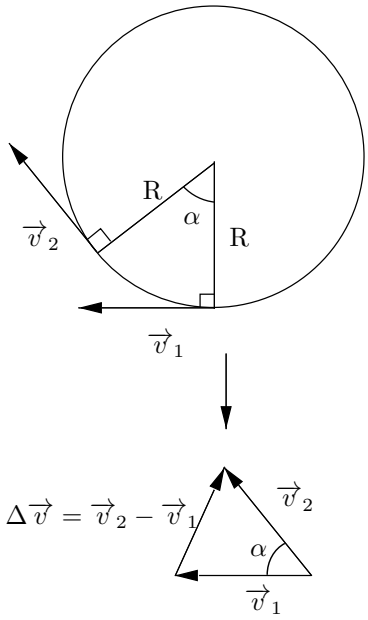
si $\Delta\overrightarrow{v}$ est non nul, alors il y a accélération. Sur la figure on voit aussi que la direction de $\Delta\overrightarrow{v}$, comme celle de l'accélération $\overrightarrow{a}$, est radiale et plus précisément dans le sens du centre du cercle.

Le mouvement circulaire uniforme est donc particulier en ce sens que tout en se déroulant à vitesse (scalaire) constante, il se déroule avec une accélération non nulle, mais qui est perpendiculaire à la vitesse.

De plus, on montre que la valeur de l'accélération est :

$$\boxed{a = \frac{v^2}{R}} \tag{2.14}$$

Figure 2.10 – *Mouvement circulaire uniforme*



où v est la vitesse scalaire et R le rayon du cercle.

En effet, selon la figure 2.10 et pour de petits angles, on a :

$$\Delta x = \alpha \cdot R \;\; et \;\; \Delta v \cong \alpha \cdot v$$

où Δx est la longueur de l'arc de cercle entre les deux instants où on considère la vitesse. Si Δt est le temps entre ces deux instants, on peut écrire :

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\alpha \cdot v}{\Delta t} = \frac{v}{R} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v}{R} \cdot v = \frac{v^2}{R}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Le mouvement circulaire uniforme est donc un mouvement composé de deux mouvements simples : un mouvement uniforme et un mouvement accéléré. Cependant, il est différent du mouvement balistique, lui aussi composé de ces deux mêmes mouvements, en ce qu'ils ne sont pas rectilignes. En effet, si on peut dire que le mouvement balistique est composé d'un MRU et d'un MRUA, on ne peut en dire autant pour le MCU. Il serait plutôt composé d'un MU et d'un MUA, voire même d'un MA si on considère que, bien que la norme du vecteur accélération soit constante, le vecteur lui-même ne l'est pas puisqu'il tourne.

Enfin, la présence d'une accélération dans le mouvement circulaire uniforme a de lourdes conséquences en termes de dynamique, c'est-à-dire en termes de forces comme nous le verrons au paragraphe 3.2.3, à l'annexe G.2 ou à l'annexe H qui traitent de la dynamique d'objets comme les satellites, liés à la terre par la force de gravitation.

2.5.7 Lois de Kepler

Un exemple très intéressant de cinématique du mouvement, au sens d'une description du mouvement, est donné par les lois de Kepler. Grâce à l'utilisation de mesures très précises fournies par le prestigieux astronome danois Tycho Brahé et à une analyse approfondie de l'orbite de Mars, Kepler parvient à montrer que l'orbite des planètes n'est pas circulaire, comme le prétendait la cosmologie ptoléménne, mais elliptique. Il énonce alors les trois lois importantes qui vont porter son nom et permettre de mieux comprendre la mécanique céleste.

Première loi L'orbite des planètes est une ellipse dont le Soleil est à l'un des foyers.

Deuxième loi En des temps égaux, la surface balayée par la distance entre le Soleil et la planète est toujours la même.

Troisième loi Le rapport du cube du demi-grand axe d'une planète au carré de sa période de révolution est constant pour tous les corps tournant autour du Soleil.

L'énoncé de la première loi peut amener à nous demander quel est le rôle du second foyer de l'ellipse, celui où le corps central n'est pas. La question vient d'une apparente dissymétrie des rôles des foyers qui est pour nous troublante, mais se révèle sans fondement. Ce foyer est bien présent et n'est tout simplement pas un point exceptionnel.

Ces lois sont en réalité valable pour tout corps tournant autour d'un corps central sous l'effet de la gravitation.

En considérant le demi-grand axe de l'orbite a et la période de révolution T, la troisième loi se traduit mathématiquement par :

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \text{constante}} \qquad (2.15)$$

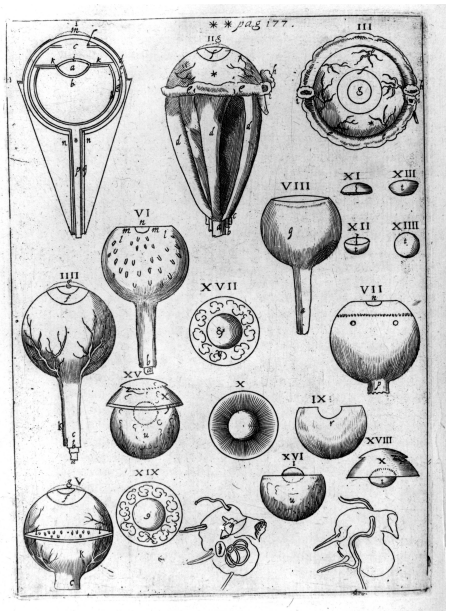
Kepler (1571-1630)

Associé au très grand astronome Tycho Brahé, Johanes Kepler va mettre fin définitivement à la cosmologie aristotélicienne qui prétendait que les orbites des planètes étaient des cercles, figure parfaite du monde des Dieux. En effet, à la suite d'une recherche portant sur les rapports de distance entre les planètes basée sur les polyèdres réguliers, Kepler va découvrir grâce à l'étude de Mars que la forme de l'orbite des planètes est elliptique.

Avec les observations de Galilée (cratères sur la Lune, taches solaires, phases de Vénus et satellites de Jupiter), celles de Tycho Brahé sur le mouvement des comètes à travers les sphères cristallines censées « porter » les planètes, les calculs de Kepler vont non seulement permettre l'abandon de l'idée de fixité de la Terre, mais plus tard trouver une place importante dans la nouvelle physique élaborée par Newton.

Portrait de Kepler tiré de Wikipedia[31]

Figure 2.11 – *Astronomica pars Optica*[32]



Un exemple intéressant d'utilisation de la troisième loi de Kepler est celui de la rotation de la Lune autour de la Terre qui permet le calcul de l'altitude des satellites en orbite géostationnaire. Il est traité au paragraphe H.4 de l'annexe H.

Notons encore que Kepler s'est aussi intéressé au fonctionnement de l'œil et aux théories de la lumière. En 1604, il rédige *Astronomia pars Optica* un ouvrage d'optique où le rôle de la rétine et celui du cristallin sont justement exposés. La figure 2.11 présente un planche illustrant le fonctionnement de l'œil tirée de cet ouvrage.

Ainsi, pour deux corps A et B tournant autour du même corps central, on a :

$$\boxed{\frac{a_A^3}{T_A^2} = \frac{a_B^3}{T_B^2}} \qquad (2.16)$$

Résumé des grandeurs et unités

Grandeur	**Définition**	**Unité**
Position	x	m
Vitesse	$v = \frac{\Delta x}{t}$	m/s
Accélération	$a = \frac{\Delta v}{t}$	m/s^2

Résumé des équations des mouvements simples

Mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA)
Les équations du mouvement :

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot a_o \cdot t^2 + v_o \cdot t + x_o \qquad (2.17)$$
$$v(t) = a_o \cdot t + v_o \qquad (2.18)$$
$$a(t) = a_o \qquad (2.19)$$
$$v^2 = v_o^2 + 2 \cdot a_o \cdot (x - x_o) \qquad (2.20)$$

$a_o = 0 \implies$

Mouvement rectiligne uniforme (MRU)
Les équations du mouvement :

$$x(t) = v_o \cdot t + x_o \qquad (2.21)$$
$$v(t) = v_o \qquad (2.22)$$
$$a(t) = 0 \qquad (2.23)$$

Pour un mouvement de chute libre (MRUA), l'accélération vaut :

$$a = g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$$

Un mouvement balistique est composé d'un MRU horizontalement et d'un MRUA en chute libre verticalement.

Un MCU est composé d'un MU et d'un MA d'accélération :

$$a = \frac{v^2}{R} \qquad (2.24)$$

Figure 2.12 – *Résumé de cinématique*

Chapitre 3

La mécanique

3.1 La « mécanique » d'Aristote

3.1.1 Introduction

On pense généralement aujourd'hui que la mécanique d'Aristote est dépassée. C'est vrai. Tout comme la mécanique de Newton et la relativité restreinte. Et tout pousse à penser que la relativité générale pourrait être bientôt dépassée. En réalité chacune de ces théories répond à des questions bien précises dans un cadre limité. Les réponses données par ces théories à ces questions sont tout-à-fait pertinentes dans ce cadre. Il est alors important de bien comprendre l'utilité de maintenir la connaissance de ces théories. S'il est naturel aujourd'hui de maintenir dans les universités l'enseignement de la théorie de Newton parce qu'elle à permis d'envoyer des hommes sur la Lune, il est tout aussi important de présenter la théorie d'Aristote parce qu'elle est née de l'évidence et du sens commun et pour cette raison est partagée par tout un chacun. Il est donc très important de marquer bien précisément les limites aux réponses qu'elle peut fournir.

3.1.2 Platon

La physique aristotélicienne est intimement liée à la cosmologie de Platon, qui part d'une idée simple. Platon pense qu'il existe deux mondes tout-à-fait différents : l'un, humain, composé par tout ce qui se trouve au-dessous de la Lune et l'autre, divin, composé par tout ce qui est au-dessus.

> « *Le monde sublunaire où règnent les apparences [. . .] est formé de couches étagées ; il y a d'abord la Terre, puis l'Eau, l'Air et enfin le Feu se situant tout au-dessus, vers les limites du monde sublunaire. Ce monde dans lequel vivent les hommes est imparfait, corruptible.*
> *Le monde céleste [. . .] est le siège des idées. Il est formé de l'Éther, le cinquième élément (ou quintessence). C'est là que se trouvent les astres qui sont des êtres éternels, parfaits, divins et immuables. Parfaits, ils doivent aussi avoir un mouvement parfait autour de la Terre, c'est-à-dire un mouvement circulaire uniforme (MCU), ou éventuellement une combinaison de tels mouvements. Dans l'esprit pythagoricien, le MCU est effectivement le mouvement qui, par ses qualités de symétrie et d'harmonie, est le plus parfait que l'on puisse imaginer.* »
>
> (Lindemann, 1999, p. 43 et 44.)

C'est dans le cadre de cette cosmologie qu'Aristote va établir sa physique. Et cette décomposition de l'univers, ce qu'on peut aussi appeler le macrocosme, avec les quatre éléments « chimiques » du monde sublunaire a aussi longtemps influencé la médecine avec la théorie des humeurs :

> « *Selon cette théorie, la santé corporelle résulte de l'équilibre de quatre principes, ou humeurs (liquides), distincts – le sang, le flegme, la bile jaune et la bile noire ou atrabile. Tout excès d'une de ces humeurs mène à des types de personnalités que l'on continue à qualifier de san-*

guines, flegmatiques, colériques et mélancoliques. Une domination plus complète d'une de ces humeurs entraîne une maladie [...] Le remède à la maladie, définie comme un déséquilibre entre les humeurs, consiste donc à réduire les humeurs en excès et à complémenter les humeurs affaiblies. La théorie des humeurs a ainsi inspiré la croyance séculaire en des thérapies considérées aujourd'hui comme totalement inefficaces, sinon barbares, parmi lesquelles la saignée (réduction de l'humeur sanguine), la suée, la purge, le vomissement, etc.
Mais pourquoi, en l'absence de toute preuve directe de l'existence de telles humeurs, la médecine classique a-t-elle si lourdement insisté sur quatre, et seulement quatre, humeurs ? [... Car] de même que les quatre humeurs régissaient le microcosme, les quatre éléments (l'air, le feu, la terre et l'eau) constituaient le macrocosme. »

(Gould, 2005, p. 136)

Ainsi, on peut comprendre l'importance de la cosmologie de Platon dans le monde des Anciens. La recherche de principes simples et identiques pour tous les domaines de la connaissance n'est pas nouvelle et surtout pas l'apanage des scientifiques actuels.

3.1.3 Aristote

L'idée fondamentale de la dynamique d'Aristote vient de l'observation commune du fait que le mouvement finit toujours par s'arrêter. Ainsi, selon Aristote, il existe pour chacun des cinq éléments [a] qui composent toute chose dans l'univers (la terre, l'eau, l'air, le feu et l'éther) un lieu de repos naturel. Pour la terre, c'est le centre de l'univers (cela implique que le centre de la terre se trouve au centre de l'univers). Pour l'eau, c'est sur la terre. Pour l'air, c'est sur l'eau ou la terre. Pour le feu, c'est au-dessus de l'air (c'est pourquoi le feu monte), mais au-dessous de la Lune. Enfin, pour l'éther, c'est au-dessus de la Lune.

a. Il faut mentionner le parallélisme entre les cinq éléments fondamentaux constituant l'univers et l'existence des cinq polyèdres réguliers convexes, dit platoniciens, que sont le tétraèdre, dont les quatre faces sont composées d'un triangle équilatéral, le cube, dont les six faces sont carrées, l'octaèdre, dont les huit faces sont un triangle équilatéral, le dodécaèdre, dont les douze faces sont pentagonales et l'icosaèdre, dont les vingt faces sont des triangles équilatéraux.

Cinématique

En conséquence, il existe des mouvements dits naturels, ceux qui mènent un objet, selon sa composition, vers son lieu naturel de repos, et des mouvements dits forcés ou violents, ceux qui éloignent l'objet de son lieu naturel de repos. Par exemple, étant essentiellement composée de terre, une pierre qu'on laisse tomber va naturellement rejoindre, au plus près qu'il lui est possible de le faire, le centre de la terre. La chute d'un tel objet est donc un mouvement naturel. Par contre, le mouvement d'un boulet de canon est composé : au début, le boulet, composé de terre, s'élève et ainsi s'éloigne de son lieu naturel de repos, le centre de l'univers. Son mouvement est donc violent. Puis, il s'approche de la Lune, lieu divin dans lequel il n'existe qu'un mouvement éternel : le mouvement circulaire uniforme (MCU), c'est-à-dire un mouvement que l'on pourrait dire sans mouvement, un mouvement à vitesse constante. Sa trajectoire prend donc une allure divine, c'est-à-dire tend vers le cercle. C'est la partie haute du mouvement du boulet. Puis, il retombe. Son mouvement redevient donc naturel.

Au total, on distingue donc trois types de mouvement dans la cinématique d'Aristote : les mouvements naturels, les mouvements violents et les mouvements divins. Les deux premiers se font essentiellement en ligne droite. Le dernier est circulaire à vitesse constante.

Dynamique

Cette cinématique est complétée par une dynamique en parfaite logique avec la première. Car, si les objets ont un lieu naturel de repos, c'est que leur état naturel est précisément d'être au repos (comme les hommes en quelque sorte, et on peut bien penser que cette comparaison pouvait avoir un sens à cette époque). Ainsi, pour qu'ils restent en mouvement, il faut les y aider en exerçant sur eux une contrainte, une « force » en termes modernes. Pour Aristote, l'état de mouvement est donc directement lié à la force qui lui permet d'exister. Et bien entendu plus cette force est grande, plus l'état de

Aristote (384-322 av. J.-C.)

Un homme du IV^e^ siècle av. J.-C., qui représentera la connaissance classique (la scolastique) à partir du XIII^e^ siècle et pendant plusieurs siècles après. Un homme dont la pensée servira l'Église catholique, suivant Thomas d'Acquin, pour imposer une vision cosmologique où l'homme est au centre de l'univers. Un homme qui découpera le monde en deux : l'humain et le divin. Un homme dont l'idée maîtresse est celle de fixité et qui sera placé au centre des débats sur le mouvement de la Terre.

> « *Il y a dans la nature trois ordres de recherche : l'immobile (le premier moteur qui doit être immobile sinon il serait mu), le mu incorruptible (le ciel) et le mu corruptible (le monde sublunaire).* » [33]

Un homme, ou plutôt une doctrine à laquelle les Bruno et Galilée s'opposeront pour faire émerger l'idée d'une physique universelle.

Aristote peint par Raphaël, tiré de Wikipedia[34]

mouvement sera grand, c'est-à-dire plus la vitesse de l'objet sera importante.

On pourrait résumer la dynamique d'Aristote en termes anachroniques en disant que pour lui la vitesse est directement proportionnelle à la force :

$$F \sim v \tag{3.1}$$

Cette théorie est si naturelle qu'elle paraît évidente. Pour l'illustrer, considérons les quatre questions suivantes :

1. Un canon pointe verticalement. A l'arrêt, il tire un obus qui lui retombe dessus. Qu'en est-il si le canon se déplace uniformément et horizontalement, tout en pointant toujours verticalement ? L'obus retombe-t-il derrière le canon, sur le canon ou devant ?
2. On laisse tomber un objet du haut de la Tour Eiffel. Étant donné que la terre tourne, celle-ci se déplace. En conséquence, cet objet va-t-il tomber au pied exact de là où il a été lâché, un peu à l'est de ce point ou un peu à l'ouest ?
3. Un avion veut remettre des vivres aux rescapés d'un naufrage réunis sur une île déserte. Doit-il lâcher son colis avant l'île, sur l'île ou après elle ?
4. Un pirate lâche son couteau du haut de la vigie du grand mât. Le bateau est en pleine poursuite d'un autre vaisseau. Le couteau tombera-t-il du côté de la proue, du côté de la poupe ou au pied du grand mât du bateau ?

Explications :

1. — Selon Aristote, au moment où l'obus quitte le canon, plus rien ne le pousse horizontalement. Il monte et redescend donc sur place. Comme pendant ce temps le canon se déplace, l'obus retombe derrière le canon.
   — Actuellement, on considère l'inertie de l'obus qui le fait se déplacer horizontalement à la même vitesse que le canon pendant qu'il monte et redescend. L'obus retombe donc sur le canon. L'expérience en atteste.
2. — Selon Aristote, au moment où l'objet quitte le haut de la Tour Eiffel, plus rien ne le pousse horizontalement. Il descend donc sur place. Comme pendant ce temps la Tour Eiffel se déplace vers l'est, l'objet tombe à l'ouest de celle-ci.
   — Actuellement, on considère l'inertie de l'objet qui le fait se déplacer horizontalement à la même vitesse que la Tour Eiffel pendant qu'il tombe. L'objet tombe donc au pied de la Tour Eiffel. L'expérience en

atteste (enfin presque, car la terre tourne et en réalité... mais c'est une autre histoire).

3. — Selon Aristote, au moment où le colis quitte l'avion, plus rien ne le pousse horizontalement. Il tombe donc sur place. Il faudrait donc lâcher le colis juste au dessus de l'île.
   — Actuellement, on considère l'inertie du colis qui le fait se déplacer horizontalement à la même vitesse que l'avion pendant qu'il tombe. Il faut donc le lâcher avant l'île pour qu'il arrive bien à destination. L'expérience en atteste.
4. — Selon Aristote, au moment où le couteau quitte la vigie, plus rien ne le pousse horizontalement. Il tombe donc sur place. Comme pendant ce temps le bateau se déplace, le couteau tombe du côté de la poupe du bateau.
   — Actuellement, on considère l'inertie du couteau qui le fait se déplacer horizontalement à la même vitesse que le bateau pendant qu'il tombe. Le couteau tombe donc au pied du grand mât. L'expérience en atteste.

Ainsi, la mécanique d'Aristote traduit le fait évident qu'il faut pousser un objet pour qu'il se déplace. Dans la vie de tous les jours, c'est exact parce qu'il y a du frottement. Mais on sait aujourd'hui que cette affirmation est généralement fausse, qu'il n'est pas nécessaire d'exercer une force sur un objet pour qu'il soit en mouvement.

Ainsi, on peut dire que la théorie d'Aristote est fausse. Mais on peut aussi la voir comme une bonne théorie pour les cas de la vie courante. En effet, il semble normal de dire qu'il faut une force pour déménager un meuble d'un point à un autre et il est idiot de dire qu'il va se déplacer sans qu'on exerce de force sur lui. Il est intéressant de remarquer que les personnes qui soutiennent qu'il est absolument nécessaire d'exercer une force sur lui pour qu'il se déplace oublient que, immobile devant eux, il se déplace tout de même à cause de la rotation de la terre. Et cela sans qu'aucune force ne le pousse à le faire[b].

b. Cela n'est pas tout-à-fait vrai, car pour qu'il tourne avec la terre, il est nécessaire qu'une force le mette en rotation. Il s'agit de son poids.

Finalement, il faut mentionner le fait qu'aucune expérience irréfutable ne contredira la théorie d'Aristote avant celle du pendule de Foucault (1851) qui prouvera de manière indiscutable la rotation de la Terre. Pourtant, c'est bien avant cette date que la théorie d'Aristote a été rejetée. La découverte par Galilée de cratères sur la Lune, présentés dans le « Sidereus Nuncius » en 1610, porta un premier coup au monde divin d'Aristote représenté par la perfection lunaire. Puis, des taches solaires, qu'un tel astre divin n'aurait pas dû présenter, des satellites tournant autour de Jupiter, évoquant encore l'idée que la Lune pourrait n'être que le satellite d'une Terre tournant elle-même autour du Soleil, ont ébranlé la théorie aristotélicienne. Finalement, les phases de Vénus, dont la succession était incompatible avec le système géocentrique d'Aristote, mais parfaitement explicable avec une théorie héliocentrique, ont mis à bas l'édifice. Dès ces découvertes connues des scientifiques d'alors, le monde d'Aristote s'est écroulé. Progressivement dans l'opinion publique, mais rapidement chez les intellectuels et malgré la condamnation de Galilée à rétracter ses idées.

Galilée n'a pas été le seul à entamer le dogme aristotélicien. Avant lui, Giordano Bruno soutint que les étoiles étaient des soleils pareils au nôtre, que la Terre tournait autour du soleil et que ce mouvement ne se voyait pas car nous y participions. Bruno fut brûlé vif par l'Église (qui ne reconnaît toujours pas son erreur !) en 1600.

La réflexion de ces hommes prépara la possibilité même de penser l'univers d'une autre manière. Mais, ce fut le travail d'autres scientifiques, dont Newton, qui donnèrent à la physique son véritable caractère universel en détruisant totalement l'idée des deux mondes d'Aristote. Nous allons voir que la théorie de Newton, si elle résout les erreurs d'Aristote et est donc une théorie plus exacte que celle d'Aristote, a aussi ses propres limitations. Et jusqu'à aujourd'hui, malgré la prétention affirmée des physiciens à décrire l'ensemble de l'univers, il n'existe toujours pas de théorie universellement valable.

3.2 Mécanique de Newton

3.2.1 Introduction

Avec Einstein, Newton est le plus grand physicien de tous les temps (bien qu'il faille se méfier des génies qui ont tous puisé à la source des nombreuses connaissances de leur temps, comme c'est particulièrement le cas de Newton) (Hawking, 2003, voir la préface de Jean-Pierre Luminet). C'est lui qui, avec les « Principes mathématiques de la philosophie naturelle » [c] (entendez par « philosophie naturelle » la physique) parus en 1687, pose pour la première fois les bases d'une théorie complète du mouvement et de ses causes. Mais il ne se limite pas à cela. Il publie aussi sa fameuse loi de la gravitation, qui détermine une relation d'attraction très générale entre les corps qui ont une masse et étudie aussi l'optique de son temps, domaine dans lequel il se signale par la découverte des anneaux dits de Newton.

3.2.2 Mécanique

Toute la mécanique de Newton repose sur trois axiomes [d] ou lois fondamentales. L'invention (au sens de « découverte ») de ces lois n'est pas due au hasard, mais découle directement d'une réflexion en opposition à la physique d'Aristote, comme on va le voir ci-dessous.

Les trois lois de Newton

Présentons tout d'abord ces trois lois fondamentales.

Première loi (ou loi de l'inertie)

> « Tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme si et seulement si la somme des forces qui s'exercent sur lui est nulle. » [e]

Cette loi est en opposition totale avec la notion « d'état de repos » d'Aristote. Pour Aristote, un corps n'est dans son état de repos que s'il ne bouge pas par rapport au centre de l'univers. Ainsi, un état de mouvement ne peut être un état de repos, c'est-à-dire un état qui persévère. Pour lui, le mouvement ne dure pas, à moins qu'on le force à durer. Pour Newton, l'état de repos et l'état de mouvement rectiligne uniforme sont deux choses identiques.

Pour Aristote, un objet qui ne bouge pas n'est soumis à aucune force. Pour Newton, un objet qui bouge en se déplaçant en ligne droite et à vitesse constante n'est pas non plus soumis à une force. En d'autres termes, pour Newton, il n'est pas nécessaire d'exercer une force pour qu'il y ait mouvement.

La traduction mathématique actuelle de la première loi élimine ainsi naturellement la référence à un état de repos pour l'inclure dans la loi en tant que mouvement rectiligne à vitesse constante nulle :

Première loi (version actuelle)

$$\boxed{\text{MRU} \Leftrightarrow \sum \overrightarrow{F^{ext}} = 0} \tag{3.2}$$

La double flèche signifie « si et seulement si ». En d'autre termes, on peut lire cette loi dans les deux sens :

- si un objet est en Mouvement Rectiligne Uniforme, alors on peut dire que la somme des forces extérieures qui s'exercent sur lui est nulle ($\Rightarrow$).
- si on sait que la somme des forces qui s'exercent sur un objet est nulle, alors cet objet est en Mouvement Rectiligne Uniforme ($\Leftarrow$).

Deuxième loi (loi fondamentale de la dynamique) [f]

$$\boxed{\sum \overrightarrow{F^{ext}} = m \cdot \overrightarrow{a}} \tag{3.3}$$

Cette loi exprime la relation entre cause et effet. La cause du mouvement étant la force totale qui s'exerce sur le système étudié et l'effet étant son accélération, la loi exprime la relation qui existe

c. Cet ouvrage est aussi intitulé « Principia mathematica ... »

d. Le terme d'axiome est intéressant ici puisqu'il souligne que toute la mécanique de Newton peut être logiquement déduite de ces postulats initiaux.

e. Le texte exact, traduit par Marie-Françoise Biarnais dans *isaac newton, principia mathematica*, Christian Bourgois Éditeur 1985, p.40, dit :

« Tout corps persévère en son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, sauf si des forces imprimées le contraignent d'en changer. »

f. Le texte exact (Biarnais, 1985, p. 41) dit : « Le changement de mouvement est proportionnel à la force motrice imprimée et s'effectue suivant la droite par laquelle cette force est imprimée. »

Isaac Newton (1643-1727)

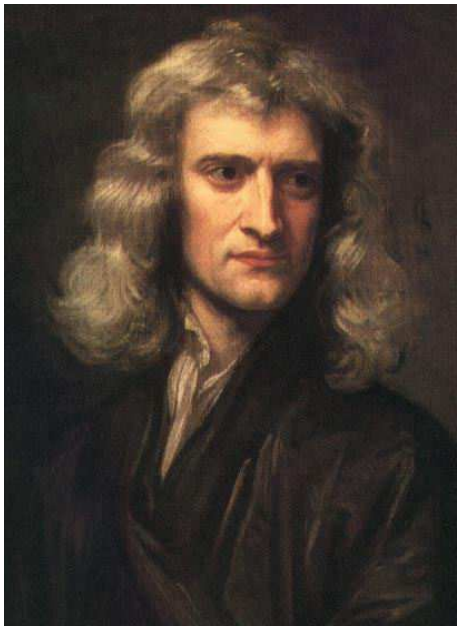
Newton est considéré comme l'un des deux plus grands physiciens de tous les temps (avec Einstein). Il formula les trois lois fondamentales de la dynamique ainsi que la loi de la gravitation universelle. Pourtant cette dernière a été découverte par un autre : Hooke. Voici le texte original de Newton :

« Axiomes ou lois du mouvement

Loi 1 *Tout corps persévère en son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, sauf si des forces « imprimées » le contraignent d'en changer.*

Loi 2 *Le changement de mouvement est proportionnel à la force motrice imprimée et s'effectue suivant la droite par laquelle cette force est imprimée.*

Loi 3 *La réaction est toujours contraire et égale à l'action : ou encore les actions que deux corps exercent l'un sur l'autre sont toujours égales et dirigées en sens contraire. » (Biarnais, 1985, pp. 40 et 41.)*



Portrait de Newton tiré de Wikipedia[35]

entre les deux par l'intermédiaire de la masse. Ainsi la cause mène à une expression du mouvement, en l'occurrence l'accélération, qui permet d'obtenir en fin de compte la position de l'objet au cours du temps, comme nous le verrons plus tard.

Par ailleurs nous reviendrons aussi sur la notion de force extérieure.

Troisième loi (loi de l'action et de la réaction)

> « La réaction est toujours contraire et égale à l'action : ou encore les actions que deux corps exercent l'un sur l'autre sont toujours égales et dirigées en sens contraire. » [g]

Cette loi se traduit mathématiquement par le fait que le vecteur force exercée par un objet A sur un objet B est de mêmes grandeur et direction, mais de sens opposé au vecteur force exercée par l'objet B sur le A. En d'autres termes :

$$\boxed{\overrightarrow{A} = -\overrightarrow{R}} \tag{3.4}$$

g. C'est le texte exact de (Biarnais, 1985, p. 41)

Force extérieure

L'énoncé de la troisième loi va nous faire revenir à la notion de force extérieure utilisée dans la loi fondamentale de la dynamique. En effet, selon la loi de l'action et de la réaction, lorsqu'on pousse un objet pour le mettre en mouvement, en réaction, il nous pousse avec une force de même intensité mais de sens contraire. Si on utilise, par ailleurs, la seconde loi, il semble donc à première vue, que la somme des forces en jeu est toujours nulle. Ainsi, l'accélération devrait être aussi nulle et l'objet ne devrait pas se mettre en mouvement. Bien entendu, l'expérience montre le contraire. Où est donc le problème ?

En réalité, sur un objet solide s'exercent une multitude de forces. Toutes ne sont pas responsables du mouvement de l'objet. Les forces d'interaction entre les différentes parties de celui-ci, par exemple, ne peuvent être tenues pour responsables du mouvement d'ensemble de l'objet. Cela reviendrait à dire qu'il peut s'accélérer lui-même. De la même manière, les forces exercées par l'objet sur son environnement ne peuvent avoir une action sur l'objet lui-même. Seules les forces exercées par l'environnement extérieur en sont capables.

Le problème vient donc du fait qu'en tenant compte simultanément des actions et des réactions dans la seconde loi, on implique des forces qui n'ont rien à voir avec la cause du mouvement. Il ne faut donc considérer que les forces extérieures qui s'exercent sur l'objet. La force exercée pour pousser l'objet doit donc apparaître en tant que force extérieure dans la seconde loi, alors que sa réaction, la force avec laquelle l'objet nous pousse, ne le doit pas.

Pour déterminer l'accélération d'un objet, on est donc amené à le définir en tant que système étudié. L'accélération impliquée dans la loi fondamentale de la dynamique est donc celle du système et les forces qui en sont la cause sont uniquement les forces exercées par l'extérieur sur ce système.

C'est donc la notion de force extérieure qui traduit la cause du mouvement. Cette notion est centrale dans la mécanique de Newton.

Précisons enfin que l'unité de la force est le Newton, noté N. Il s'agit de la force nécessaire pour accélérer de $1\,\mathrm{m/s^2}$ une masse de $1\,\mathrm{kg}$.

Exemples

— Une voiture roule en ligne droite à vitesse constante. La force qui lui permet de maintenir sa vitesse vaut 200 N. Calculez la force de frottement.

Réponse : comme la voiture roule à vitesse constante et en ligne droite, la première loi de Newton nous indique que la somme des forces qui s'exercent sur elle est nulle. Ainsi, la force poussant la voiture étant vers l'avant et la force de frottement vers l'arrière, on peut dire que la force de frottement vaut aussi 200N.

— Une voiture (de masse $m = 2000\,\mathrm{kg}$) accélère de $0\,\mathrm{m/s}$ à $100\,\mathrm{km/h}$ en $12\,\mathrm{s}$. Quelle distance a-t-elle parcouru ? D'où vient la force qui lui permet d'accélérer de telle manière et quelle est sa valeur ?

Réponse : $100\,\mathrm{km/h} = 27{,}7\,\mathrm{m/s}$. Comme l'accélération se calcule, par définition : $a = (27,7 - 0)/12 = 2{,}31\,\mathrm{m/s^2}$, la distance vaut alors : $x = 2,31 \cdot 12^2/2 + 0 \cdot 12 + 0 = 166{,}6\,\mathrm{m}$. La force qui lui permet d'accélérer vient du frottement avec le sol. C'est le sol qui l'exerce. En effet, la force exercée par les pneus sur le sol est clairement vers l'arrière (pensez en effet au sens dans lequel serait projeté un petit caillou collé au pneu au moment du démarrage de la voiture). Ce ne sont donc pas les pneus qui permettent à la voiture de démarrer. D'ailleurs, sur sol gelé, malgré la rotation des pneus, elle ne pourrait pas démarrer. Ainsi, il faut considérer la force exercée par le sol sur les pneus. En effet, selon la troisième loi de Newton, celle-ci, en tant que réaction à l'action vers l'arrière des pneus sur le sol, s'exerce vers l'avant.
La valeur de la force de frottement se calcule aisément par $F = m{\cdot}a = 2000{\cdot}2,31 = 4620\,\mathrm{N}$.

— Une voiture (de masse $m = 2000\,\mathrm{kg}$) freine sur une distance de $50\,\mathrm{m}$ pour éviter une collision avec un mur. Sa vitesse initiale étant de $50\,\mathrm{km/h}$, calculez son accélération et la force qui lui permet de s'arrêter.

Réponse : On ne connaît ni l'accélération, ni le temps d'arrêt. On peut donc soit utiliser les deux équations de la position et de la vitesse (deux équations à deux inconnues) dans lesquelles apparaissent le temps et l'accélération, soit utiliser une relation dérivée de ces deux équations où n'apparaît pas le temps, mais seulement l'accélération. Cette relation est (voir annexe F.2.1) :

$$v^2 = v_o^2 + 2 \cdot a_o \cdot (x - x_o)$$

Avec : $v_o = 50\,\mathrm{km/h} = 13{,}8\,\mathrm{m/s}$, $v = 0\,\mathrm{m/s}$ et $x - x_o = 50\,\mathrm{m}$, on a :

$$a_o = \frac{v^2 - v_o^2}{2 \cdot (x - x_o)} = \frac{0^2 - 13,8^2}{2 \cdot 50} = -1{,}93\,\mathrm{m/s^2}$$

Le signe négatif traduit une décélération (un freinage).
Finalement, la force de freinage vaut : $F = m \cdot a = 2000 \cdot 1,93 = 3860\,\mathrm{N}$.

3.2.3 Types de forces

La deuxième loi de Newton propose de faire jouer à la notion de force le rôle de cause du changement du mouvement. Le programme de Newton consiste donc en premier lieu à rechercher les forces qui agissent sur le système étudié. Il est par conséquent fondamental de connaître les principales forces qui peuvent agir. Il y en a beaucoup. On ne pourra les étudier toutes. En fait, il en existe principalement

Figure 3.1 – *La balance de Cavendish*
Mesurer la force de gravitation[36]

quatre. Ce sont la force de gravitation, la force électromagnétique, la force faible et la force forte. Elles sont dites fondamentales parce qu'elles sont à l'origine de toutes les autres. En d'autres termes, toutes les autres sont une manifestation de la présence des forces fondamentales.

Dans le cadre de ce cours de mécanique nous en étudierons quatre, dont une seule fondamentale : la force de gravitation, donnant lieu à la loi de la gravitation universelle.

Loi de la gravitation universelle

La force de gravitation $\overrightarrow{F}$ exprime l'attraction à distance exercée par une masse sur une autre et réciproquement.

L'expression mathématique de cette loi, qui fait référence à la figure 3.2, est la suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^3} \cdot \overrightarrow{r}} \tag{3.5}$$

Cette loi est présentée ci-dessus sous sa forme vectorielle. Elle traduit donc en même temps la direction (qui lie les centres des deux masses), le sens (attraction des deux corps) et la grandeur du vecteur force $\overrightarrow{F}$. Souvent on utilise une forme plus courante qui ne traduit que la grandeur de la force, mais présente plus clairement sa dépendance au carré de la distance (r^2) :

$$\boxed{F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}} \tag{3.6}$$

Remarquons que :

— la loi de la gravitation universelle n'est valable que pour des corps ponctuels ou sphériques,

— qu'elle traduit une action à distance, ce qui posera par la suite de graves problèmes,

— que Newton était conscient des problèmes qu'une action à distance pouvait poser, mais qu'il n'y a pas trouvé de réponse satisfaisante,

— que la constante G est une constante fondamentale appelée « constante de la gravitation universelle », et vaut $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2}$. Cette constante est très petite. Cela traduit une force relativement faible (même si pour des masses conséquentes comme la Terre et le Soleil par exemple, elle peut avoir une valeur importante). Nous verrons, avec la force électrique, un exemple de force beaucoup plus forte.

Le poids

On a vu au paragraphe 2.5.3 que l'accélération à la surface de la Terre d'un objet en chute libre (c'est-à-dire qui n'est soumis à aucun frottement) vaut $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Or, en chute libre, la seule force qui s'exerce est le poids. Ainsi, selon la deuxième loi de Newton, on peut écrire :

$$P = F = m \cdot a = m \cdot g \;\Rightarrow$$

$$\boxed{P = m \cdot g} \tag{3.7}$$

Évidemment le poids étant une force, il s'exprime en newtons.

On peut aussi comprendre le poids d'une autre manière. On peut considérer que le poids n'est que l'expression de la force de gravitation qui s'exerce entre la Terre et le corps considéré placé à la surface

Robert Hooke (1635-1703)

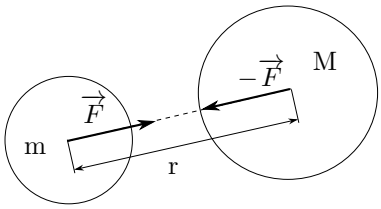
Hooke est un physicien bien moins connu que Newton. Pourtant, il mériterait de l'être plus car il est à l'origine de la loi de la gravitation universelle.

> « ... toute sa vie, Newton s'efforça [...] de s'attribuer la priorité sur maintes découvertes faites par ses contemporains ou ses précurseurs. Au-delà de la controverse bien connue avec Leibnitz sur l'invention du calcul différentiel, Hooke fut la principale victime de la vindicte de Newton, après que Hooke eut prétendu – à juste titre – avoir découvert avant lui la loi du carré inverse décrivant mathématiquement la force d'attraction gravitationnelle capable de conférer aux planètes des orbites elliptiques. [...] Il apparaît donc que les actes des grands esprits scientifiques ne sont pas nécessairement dignes d'hommes au grand cœur (mais est-ce une surprise ?). » (Hawking, 2003, pp. V et VI.)

Jean-Pierre Luminet, préface à l'édition française.

Actuellement on ne connaît aucun portrait de Hooke dont on soit sûr (Newton a insisté pour qu'on retire le portrait de Hooke de la Royal Society).

Figure 3.2 – *Loi de la gravitation universelle.*



de celle-ci. Ainsi, à l'aide de la loi de la gravitation, on peut écrire :

$$F = G \cdot \frac{M_{terre} \cdot m}{r_{terre}^2} = m \cdot g$$

Il faut bien comprendre que le poids et la gravitation ne constituent pas deux choses distinctes, mais qu'il s'agit de la même force ! Ainsi, on peut écrire, à la suite de l'équation précédente :

$$\boxed{g = G \cdot \frac{M_{Terre}}{r_{Terre}^2} = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} \qquad (3.8)$$

C'est l'expression de l'accélération d'un corps en chute libre à la surface de la Terre. On peut donc facilement généraliser cette équation pour un corps autre que la Terre :

$$\boxed{g = G \cdot \frac{M_{planéte}}{r_{planéte}^2}} \qquad (3.9)$$

En particulier aussi, on peut utiliser l'expression de g ci-dessus pour exprimer la variation de l'accélération terrestre en fonction de l'altitude :

$$g = G \cdot \frac{M_{Terre}}{(r_{Terre} + h)^2}$$

où h est l'altitude au-dessus de la surface de la Terre. On constate donc que l'accélération diminue avec l'altitude. Par conséquent, le poids aussi. On peut donc se poser la question suivante : de combien « maigrit »-on en montant au sommet de l'Everest ?

Exemple Déterminez la perte de poids que constate une personne de masse $m = 80\,\mathrm{kg}$ en passant du bord de la mer au sommet de l'Everest ($\sim 8000\,\mathrm{m}$).

Solution :

On trouve l'accélération terrestre au niveau de la

mer :

$$\begin{aligned} g_{mer} &= G \cdot \frac{M_{Terre}}{(r_{Terre}+h)^2} \\ &= 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,97 \cdot 10^{24}}{(6,37 \cdot 10^6 + 0)^2} \\ &= 9{,}813\ 44\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

Puis l'accélération terrestre au sommet de l'Everest :

$$\begin{aligned} g_{Everest} &= G \cdot \frac{M_{Terre}}{(r_{Terre}+h)^2} \\ &= 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,97 \cdot 10^{24}}{(6,37 \cdot 10^6 + 8000)^2} \\ &= 9{,}788\ 84\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

Ainsi, le poids de la personne au niveau de la mer vaut :

$$P_{mer} = m \cdot g_{mer} = 80 \cdot 9,81344 = 785\,\mathrm{N}$$

et à 8000 m :

$$P_{Everest} = m \cdot g_{Everest} = 80 \cdot 9,78884 = 783\,\mathrm{N}$$

La différence est donc de : $\Delta P = 785 - 783 = 2\,\mathrm{N}$

Au niveau de la mer, cela correspond à une variation de masse de :

$$\Delta m = \frac{\Delta P}{g_{mer}} = \frac{2}{9,81344} = 204\,\mathrm{g}$$

Masse et poids

La relation entre masse et poids est donc celle qui lie une quantité de matière à la force exercée sur elle par un autre corps (la Terre par exemple). Or, déterminer une quantité de matière n'est pas simple, alors que mesurer une force l'est : un simple ressort comprimé le permet. D'où l'idée de rapporter la force exercée sur un objet à sa quantité de matière, c'est-à-dire sa masse, via l'équation :

$$m = \frac{F}{a}$$

Il est alors un appareil dont la mesure peut prêter à confusion : la balance. Et même si le langage est précis, on dit « je vais mesurer mon poids sur la balance », il est nécessaire d'insister sur le fait qu'une balance mesure le poids et non la masse. Car il faut bien comprendre que la mesure du poids à l'aide d'une balance passe nécessairement par l'utilisation d'un ressort (ou un mécanisme du même type) dont la force de réaction limite l'enfoncement. C'est cette force de réaction qui est mesurée par la balance et non la masse de la personne, comme pourrait nous le faire croire l'indication donnée en kilogrammes. On peut s'en convaincre en mesurant la masse d'un objet à l'aide d'une balance alternativement placée sur la Terre et sur la Lune. Même si la masse est la même dans les deux cas, la balance va donner des indications différentes. Elle est en effet simplement calibrée pour indiquer la masse à partir d'un poids mesuré sur la Terre. L'opération revient à écrire :

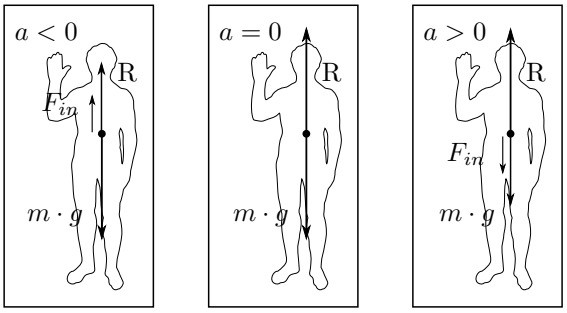
$$m = \frac{F}{g}$$

où g est l'accélération à la surface de la Terre. Ainsi, si la balance est utilisée sur la Lune, son indication sera erronée, car c'est alors l'accélération lunaire qu'il faudrait utiliser. Donc, si une balance indique la masse, c'est en réalité le poids qu'elle mesure.

Poids apparent

Le poids n'est donc rien d'autre que la force de gravitation qui s'exerce sur une personne à la surface d'un corps donné. Selon la loi de la gravitation universelle, il est notamment fonction de la masse de ce corps et de celle de la personne (d'où l'usage d'une balance pour le mesurer et le rapporter à cette masse). Mais, selon cette loi, il n'est pas fonction de l'état de mouvement de la personne. Comment comprendre alors que le poids mesuré par une balance dans un ascenseur en mouvement puisse varier, comment comprendre qu'un astronaute puisse s'entraîner à l'état d'apesanteur dans un avion au voisinage de la terre, où ce poids n'a certainement pas disparu ?

Pour le comprendre, il faut faire appel à l'idée d'un poids apparent. Car, en réalité, une balance placée dans un ascenseur qui se déplace ne mesure pas le poids réel de la personne, mais ce qu'on appelle son poids apparent. De quoi s'agit-il ? Considérons tout d'abord la personne placée sur une balance dans un ascenseur immobile (voir figure 3.3[37]). A l'arrêt, la force du ressort R est égale au poids de la personne. La situation des forces est celle présentée à la figure 3.3(b). Dans cette si-



(a) a<0 (b) a=0 (c) a>0

Figure 3.3 – *Poids apparent*

tuation, on peut écrire la deuxième loi de Newton ainsi :

$$R - m \cdot g = m \cdot 0 = 0 \Rightarrow \quad (3.10)$$
$$R = m \cdot g$$

On constate bien que la mesure R faite par la balance marque le poids.

Considérons maintenant le cas décrit par la figure 3.3(c) où l'ascenseur monte. Par rapport au cas statique, aucune force supplémentaire ne s'est ajoutée. Par contre, comme l'ascenseur accélère vers le haut, on doit maintenant écrire l'équation du mouvement ainsi :

$$R - m \cdot g = m \cdot a \neq 0 \Rightarrow \quad (3.11)$$
$$R = m \cdot g + m \cdot a$$

La mesure R de la balance ne marque alors plus le poids, mais celui-ci augmenté du terme $m \cdot a$. On peut facilement le comprendre : la réaction R doit non seulement compenser le poids mais aussi lui permettre d'accélérer.

Maintenant, considérons le problème depuis l'ascenseur en mouvement. En constatant l'augmentation du poids, on pourrait croire à l'apparition d'une nouvelle force qui l'augmente. Ce qui, bien évidemment n'est pas le cas. Mais force est de constater que la balance marque à travers sa réaction R une autre valeur. Or, depuis l'ascenseur, le mouvement d'accélération de la personne n'existe pas. Elle se trouve en équilibre sur une balance et une personne non avertie pourrait penser que l'équation du mouvement est simplement celle donnée par 3.10. Ce qui est faux et montre une limite dans l'utilisation de la deuxième loi de Newton.

En effet, dans sa version la plus simple, elle n'est pas valable pour des référentiels accélérés, comme c'est le cas de notre ascenseur. Mais, pour ne pas renoncer à utiliser cette loi dans ce cadre élargi, on peut faire une modification formelle qui consiste à admettre l'existence d'une fausse force supplémentaire F_{in} uniquement dans le cas de référentiels accélérés. Vue depuis l'ascenseur, on écrit alors :

$$R - m \cdot g - F_{in} = 0 \Rightarrow$$
$$R = m \cdot g + F_{in}$$

et on identifie cette pseudo-force F_{in} au terme $m \cdot a$ de l'équation du mouvement 3.11. En effet, celle-ci peut être écrite comme :

$$R - m \cdot g - m \cdot a = 0$$

Ainsi, on constate, dans ce second exemple où le référentiel est accéléré, que le poids donné par une balance n'est pas le poids réel dû à la force de gravitation. Ce poids est dit poids apparent et est composé de la force de gravitation, à laquelle il faut adjoindre une pseudo-force d'inertie. Mais, il faut relever que cette force est fictive. En effet, rien n'exerce de force supplémentaire au poids vers le bas. Au contraire, c'est la force de réaction de la balance, qui est vers le haut et est nécessaire pour accélérer la personne, qui est à l'origine de la force d'inertie. Nous verrons par la suite que ce problème se retrouve dans les mouvements circulaires où une vraie force, la force centripète, est à l'origine d'une fausse force, la force centrifuge, et cela pour les mêmes raisons.

Considérons enfin le cas décrit par la figure 3.3(a) où l'ascenseur descend. Pour cela, dans l'équation du mouvement, il faut relever que nous avons précédemment compté positivement les termes orientés vers le haut, comme la réaction R, et négativement ceux dont le sens est vers le bas, comme le poids. Par là, nous avons choisi un axe pointant vers le haut. Ainsi, dans le cas d'une accélération vers le haut, le terme $m \cdot a$ était compté positivement. Dans le cas qui nous occupe maintenant, il est vers le bas et doit être compté négativement. L'équation du mouvement devient alors :

$$R - m \cdot g = -m \cdot a \Rightarrow$$
$$R = m \cdot g - m \cdot a$$

et le poids apparent R noté par la balance est plus faible que le poids réel puisqu'il est diminué de $m \cdot$

a qui peut être considéré comme une pseudo-force d'inertie.

L'exemple de la relation entre poids et poids apparent montre donc que le mouvement d'un objet n'est pas sans incidence sur la mesure de son poids. C'est particulièrement le cas pour les cosmonautes qui s'entraînent à l'état d'apesanteur en avion. Cette apesanteur fictive n'est obtenue que grâce à la chute simultanée de l'avion autour des cosmonautes, ce qui rend leur poids apparent nul.

Ainsi, par la suite, dans le problème de l'analyse du phénomène de marée notamment, il faudra tenir compte des mouvements accélérés.

De plus, cet exemple marque les limites de la deuxième loi de Newton qui n'est valable, sous sa forme la plus simple, que pour des référentiels qui se déplacent à vitesse constante, référentiels dits inertiels. Pour des référentiels non-inertiels, des référentiels accélérés, il est nécessaire de la modifier en y ajoutant des pseudo-forces d'inertie qui traduisent l'état de mouvement du référentiel. Mais nous y reviendrons.

Figure 3.4 – *La sensation des mouvements*
Gravitation, poids et mouvement circulaire[38]

Gravitation et MCU

Une des nombreuses applications intéressantes de la loi de la gravitation universelle est la détermination de l'altitude à laquelle il faut placer un satellite en orbite pour qu'il soit géostationnaire. Ce cas est présenté en annexe H. Il repose sur la loi de la gravitation universelle et sur la dynamique du mouvement circulaire uniforme.

Comme on l'a vu (voir paragraphe 2.5.6), le MCU est un mouvement à vitesse constante, mais à accélération non nulle. La présence d'une accélération implique celle d'une force. Celle-ci est naturellement dans la même direction et le même sens que l'accélération. En effet, cela découle de la deuxième loi de Newton et du fait que la masse est toujours positive. Cette accélération, nommée centripète (et non centrifuge), est donc créée par une force dirigée vers le centre de rotation qui dévie l'objet de sa trajectoire. Cela est parfaitement compatible avec la première loi de Newton puisque selon elle, seule la présence d'une force peut expliquer une trajectoire non rectiligne.

Il est important de bien différencier la force centripète, qui est dirigée vers le centre du cercle de la trajectoire, de la pseudo-force centrifuge qui traduit l'impression d'être éjectée que peut avoir une personne qui est en rotation dans un manège, par exemple. Nous sommes là, comme au paragraphe 3.2.3, dans le cadre d'un mouvement accéléré : le mouvement circulaire uniforme. L'étude de ce mouvement peut se faire en observant sa dynamique de l'extérieur. On écrit alors l'équation du mouvement naturellement ainsi :

$$F_{centripète} = m \cdot a_{centripète} = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Une seule force est présente : la force centripète. Elle est réelle et peut correspondre à la force de gravitation exercée par une planète se trouvant au centre de l'orbite (considérée comme) circulaire d'un satellite ou à la force exercée par une ficelle sur la masse d'une fronde ou encore à la force de frottement exercée par la route sur les pneus d'une voiture dans un virage.

Mais, on peut aussi étudier le mouvement en analysant la dynamique d'un objet qui est fixe à l'intérieur du manège. Comme celui-ci est alors à l'arrêt par rapport à ce qui l'entoure, la deuxième loi de Newton doit présenter une somme des forces qui est nulle. Pour cela, la force centripète doit être compensée par une pseudo-force dite centrifuge et di-

rigée radialement vers l'extérieur du manège. Mais cette force est fictive. Elle ne traduit que les limites de la deuxième loi de Newton qui, pour pouvoir être utilisée dans un référentiel accéléré, doit prendre en compte la pseudo-force centrifuge. Ainsi, écrire l'équation du mouvement en passant à gauche son terme de droite permet d'en obtenir une expression valable aussi dans le référentiel non inertiel que constitue le manège. On peut donc écrire :

$$F_{centripète} = m \cdot \frac{v^2}{R} \Rightarrow \quad (3.12)$$

$$F_{centripète} - m \cdot \frac{v^2}{R} = 0 \Rightarrow$$

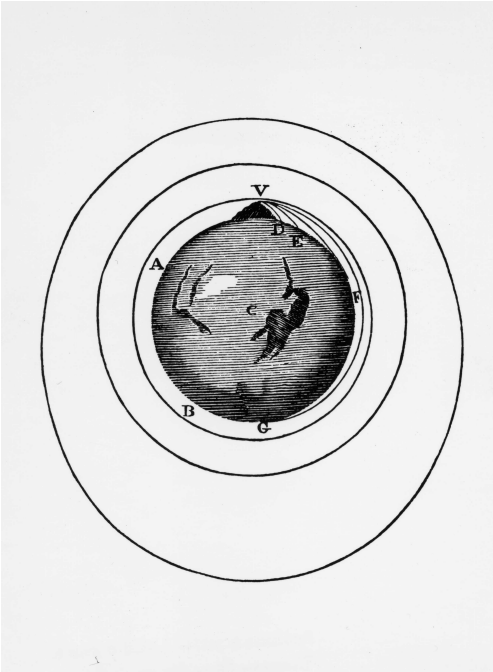
$$F_{centripète} - F_{centrifuge} = 0 \quad (3.13)$$

L'équation 3.12 constitue la loi de Newton correctement écrite dans un référentiel non accéléré, dit inertiel. Par contre, l'équation 3.13, tout en étant formellement correcte puisqu'elle dérive de 3.12, est conceptuellement fausse puisque la force centrifuge n'existe pas. En réalité, elle est écrite ainsi pour que la deuxième loi de Newton reste valable dans le référentiel en rotation, non-inertiel, et traduise l'impression fictive qu'une force en éjecte l'objet vers l'extérieur. Impression fictive, en effet, car si la force centripète n'était pas là, conformément à la première loi de Newton, l'objet irait tout simplement tout droit, marquant l'absence irréfutable de la force centrifuge.

Dans le cas du mouvement de la Lune, la force centripète est celle de la gravitation universelle, communément nommée poids. On peut donc bien dire que la Lune tourne autour de la terre parce qu'elle lui tombe dessus sous l'effet de son poids. Et son poids la fait bien accélérer, mais sans que sa vitesse n'augmente. En effet, la vitesse de la Lune dans son mouvement quasi-circulaire autour de la terre étant perpendiculaire à son poids, et donc à son accélération, aucune composante de cette dernière n'existe parallèlement à la vitesse. On peut ainsi dire que le poids de la Lune ne sert qu'à la faire tourner. Elle tombe donc bien sur la Terre tout en paraissant suspendue en état d'apesanteur. Mais c'est une apesanteur fictive.

Ainsi, Newton réconcilie les deux univers de Platon séparés par la Lune, le monde sublunaire et le monde supralunaire, à l'aide justement de ce corps qui en traçait la frontière : la Lune. Elle devient un corps comme les autres dans un univers réunifié ou les objets du monde supralunaire acquièrent un statut sublunaire et où la Terre se met à tourner autour du Soleil comme les corps parfaits du monde supralunaire. La figure 3.5 des Principia (voir aussi page 46) apparaît donc comme centrale dans l'univers newtonien, puisqu'elle présente la lune comme l'élément unificateur des deux mondes.

Figure 3.5 – *L'idée de la chute de la Lune*
Illustration des Principia.



Mais la révolution ne s'arrête pas là. Le mouvement circulaire uniforme perd son statut de perfection en devenant un cas particulier du mouvement elliptique suivant lequel s'établira désormais la mécanique céleste.

Troisième loi de Kepler

Au paragraphe 2.5.7, page 48, nous avons vu que les mouvements des planètes se font sur des ellipses. Or, dans la plupart des cas, ces ellipses sont très proches de cercles et l'approximation d'un mouvement circulaire uniforme peut être faite. Dans ce cas, on peut retrouver l'expression de la troisième loi de Kepler donnée par l'équation 2.16, page 2.16, à partir de la deuxième loi de Newton. En effet, avec

la force de gravitation comme force centripète, on a :

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{a^2} = m \cdot \frac{v^2}{a} \tag{3.14}$$

Pour un mouvement circulaire, la vitesse est donnée par :

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot a}{T} \tag{3.15}$$

En remplaçant l'équation 3.15 dans 3.14, on obtient :

$$\begin{aligned} G \cdot \frac{M \cdot m}{a^2} &= m \cdot \frac{(2 \cdot \pi \cdot a/T)^2}{a} \Rightarrow \\ G \cdot \frac{M}{a^2} &= \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot a}{T^2} \Rightarrow \\ \frac{a^3}{T^2} &= \frac{G \cdot M}{4 \cdot \pi^2} \end{aligned} \tag{3.16}$$

L'équation 3.16 constitue la troisième loi de Kepler.

Mais la nouvelle forme de cette équation met en évidence le rôle de la masse M du corps central [h] qui peut être calculée à partir du rayon de l'orbite et de la période du corps en rotation autour de lui. Cela constitue une méthode de calcul de la masse des astres, comme celle de Jupiter à partir du rayon de l'orbite et de la période de Io, par exemple, ou celle de la Lune.

La masse de la Lune peut en effet être très simplement évaluée à partir de la troisième loi de Kepler. Pour cela, de l'équation 3.16, on commence par tirer l'expression de la masse de la Lune :

$$M_{Lune} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G} \cdot \frac{d^3_{Terre-Lune}}{T^2_{Lune}} \tag{3.17}$$

Pour déterminer cette masse, il faut donc la période de la Lune sa distance à la Terre. Pour la période, on peut en première approximation, utiliser la période synodique, c'est-à-dire le temps entre deux pleines lunes. Celle-ci vaut : 29 jours et 13 heures, soit $etT = 2\ 552\ 400\,\text{s}$. Pour la distance à la Terre, on peut recourir à l'observation des éclipses. En effet, en observant l'ombre de la Terre sur la Lune lors d'une éclipse lunaire, on constate que le rapport des diamètres est d'environ deux fois et demi (rapport cependant difficile à obtenir, voir annexe C.2). De plus, en constatant lors des éclipses solaires, que l'ombre de la Lune portée par le Soleil sur la Terre est très petite, on peut évaluer qu'un objet tel que la Lune voit son ombre réduite d'un diamètre lunaire environ sur la distance Terre-Lune. Il doit en aller de même pour l'ombre de la Terre sur la Lune. Ainsi, le vrai rapport des diamètres ne doit pas être de deux fois et demi, mais de trois fois et demi. En d'autres termes :

$$\phi_{Terre} = 3,5 \cdot \phi_{Lune}$$

Au III[e] siècle avant J-C, Ératosthène parvient (semble-t-il, car sa mesure prête à discussion, voir annexe C.1) à déterminer que la circonférence de la Terre vaut un peu plus que 39 000 km, soit que la Terre a un diamètre de :

$$\phi = \frac{39'000}{\pi} = 12\ 414\,\text{km}$$

Cela implique que le diamètre de la Lune vaut :

$$\phi_{Lune} = \frac{12'414}{3,5} = 3547\,\text{km}$$

Or, l'angle α sous lequel on voit la Lune est d'un demi-degré, soit en radian $\pi/360 = 0{,}0087\,\text{rad}$. A l'aide d'une simple relation liant la longueur d'un arc L à son angle au centre α, exprimé en radian, et au rayon R du cercle, on obtient :

$$\begin{aligned} L &= \alpha \cdot R \Rightarrow \\ R &= \frac{L}{\alpha} = \frac{\phi_{Lune}}{\alpha} \\ R &= d_{Terre-Lune} = \frac{3'547}{0,0087} = 407\ 701\,\text{km} \end{aligned}$$

Ce qui représente environ 6% d'écart avec la valeur d'aujourd'hui.

A partir de là, l'équation 3.17, nous permet d'estimer la masse de la Lune :

$$M_{Lune} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G} \cdot \frac{407'701'000^3}{2'552'400^2} = 6{,}2 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$$

h. Remarquons que cette forme de la troisième loi de Kepler où l'un des corps tourne de manière circulaire autour de l'autre dont la masse est très grande par rapport au premier trahit quelque peu la seconde loi qui porte sur le caractère elliptique de la trajectoire. Dans le cas où le rapport de masse est quelconque, la troisième loi s'exprime par :

$$\frac{a^3}{T^2} = M + m$$

où a est le demi-grand axe de l'orbite et T la période. La démonstration de cette relation à l'aide de la loi de la gravitation universelle est plus complexe et ne sera pas abordée ici.

ce qui représente un ordre de grandeur 100 fois trop grand sur $1 \cdot 10^{24}$. Ce qui n'est tout de même pas si mal.

De la même manière, on peut évaluer la masse du Soleil grâce à la vitesse de rotation de la Terre autour de celui-ci et à la distance Terre-Soleil. En effet, en supposant le mouvement circulaire uniforme, on peut écrire :

$$G \cdot \frac{M_{Soleil} \cdot m_{Terre}}{d^2_{Terre-Soleil}} = m_{Terre} \frac{v^2_{Terre}}{d_{Terre-Soleil}}$$

Comme précédemment, la force de gravitation joue ici le rôle de force centripète. Après simplification et réorganisation des termes, on obtient :

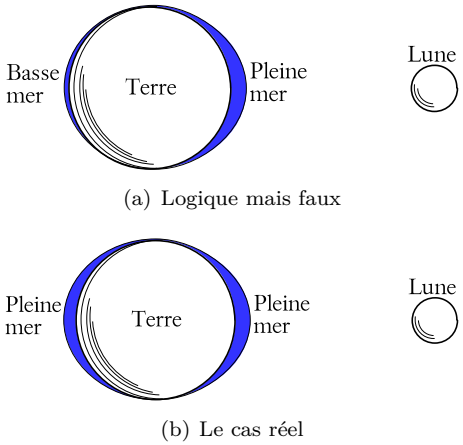
$$\begin{aligned} M_{Soleil} &= \frac{v^2_{Terre} \cdot d_{Terre-Soleil}}{G} \\ &= \frac{30'000^2 \cdot 1,496 \cdot 10^{11}}{6,67 \cdot 10^{-11}} \\ &= 2 \cdot 10^{30}\,\text{kg} \end{aligned}$$

puisque la vitesse de la Terre autour du Soleil vaut environ 30 km/s (voir exercice 15, page 212) et la distance Terre-Soleil $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m (voir le tableau A.2, page 166).

Les marées

L'application des lois de la physique humaine (monde sublunaire) à l'univers dans son ensemble va non seulement permettre de mieux comprendre la physique des objets célestes, mais aussi de mieux comprendre la physique de la Terre elle-même. La physique newtonienne et la loi de la gravitation universelle vont en effet donner une explication probante des marées (voir l'annexe J pour une explication plus mathématique).

Pour bien comprendre ce succès, il faut tout d'abord donner une description de ce phénomène très complexe. Il n'est pas possible d'aborder celui-ci de manière exhaustive et nous nous limiterons à une descriptions des phénomènes qui trouvent une explication dans la théorie dite statique de Newton (nous n'aborderons pas la théorie ondulatoire de Laplace) et dans les mouvements des principaux corps responsables des marées : la Lune et le Soleil. Encore que certaines propriétés des marées, parfaitement explicables grâce à ces mouvements, ne seront pas abordés par manque de place. Pour une description physique plus approfondie et très claire des marées, on peut consulter Guérin (2004).



(a) Logique mais faux

(b) Le cas réel

Figure 3.6 – *Pleines et basses mers*

De nos jours, seule la théorie ondulatoire de Laplace permet une prédiction suffisante pour les marées côtières notamment. Cette théorie faisant appel à des équations très complexes, le recours à l'informatique est absolument nécessaire [i].

De plus, dans ce paragraphe, on se limitera à l'explication des marées de pleine mer et de basse mer (voir ci-dessous) crées par l'influence de la Lune. Pour les marées de vives eaux et de mortes eaux, qui font intervenir l'influence du Soleil, il faudra se reporter à l'annexe J.

La principale période caractéristique de la marée est celle qui rythme les pleines mers et les basses mers. Contrairement à ce à quoi on pourrait s'attendre en pensant que c'est l'action de la Lune qui élève la mer, ce n'est pas une pleine mer (ou basse mer) par jour qui se produit, mais deux. La période de rotation de la Terre sur elle-même étant d'une journée et celle de la Lune d'un mois, un point à l'équateur (voir figure 3.6(a)) devrait se trouver à marée haute une seule fois par jour. En effet, en une journée le déplacement de la Lune est assez faible pour qu'on puisse le négliger en première approximation. Ce qui implique que pendant cette période l'eau en état de marée haute reste fixe et se situe du côté de la Lune.

i. Pour une description très mathématique mais très complète du phénomène de marée, voir Simon (2007)

Comme cela n'est pas le cas et qu'on constate l'existence de deux marées (haute ou basse) par jour, à douze heures d'intervalle, on est bien forcé de décrire le phénomène non seulement avec une marée haute du côté de la Lune (figure 3.6(a)), mais simultanément avec une autre marée haute à l'opposé de celle-ci, comme présenté sur la figure 3.6(b).

Ce rythme de deux marées par jour a constitué le principal problème pour l'explication des marées par l'influence de la Lune, jusqu'à la théorie de Newton.

C'est la loi de la gravitation universelle qui va donner une idée plus précise du phénomène. Mais cela ne va pas se faire aussi simplement qu'on peut le penser. En particulier, le rapport des influences de la Lune et du Soleil qui peut être précisément établi grâce à elle, pose aussi problème. En effet, on peut calculer la force exercée par la Lune sur une masse m située sur Terre par :

$$\begin{aligned} F_{Lune} &= G \cdot \frac{M_{Lune} \cdot m}{d^2_{Terre-Lune}} \\ &= 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{7,35 \cdot 10^{22} \cdot m}{(3,844 \cdot 10^8)^2} \\ &= 3,32 \cdot 10^{-5} \cdot m \end{aligned}$$

Pour une masse $m = 100\,\text{kg}$, cela correspond à une force $F = 3{,}32 \cdot 10^{-3}\,\text{N} = 3{,}32\,\text{mN}$.

Par ailleurs, on peut calculer la force exercée par le Soleil sur une masse m située sur terre par :

$$\begin{aligned} F_{Soleil} &= G \cdot \frac{M_{Soleil} \cdot m}{d^2_{Terre-Soleil}} \\ &= 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1,981 \cdot 10^{30} \cdot m}{(1,496 \cdot 10^{11})^2} \\ &= 5,90 \cdot 10^{-3} \cdot m \end{aligned}$$

Pour une masse $m = 100\,\text{kg}$, cela correspond à une force $F = 5{,}90 \cdot 10^{-1}\,\text{N} = 590\,\text{mN}$.

Le rapport r de la force de marée due au Soleil à celle due à la Lune est alors de :

$$r = \frac{F_{Soleil}}{F_{Lune}} = \frac{590}{3,32} = 177,7 \tag{3.18}$$

Cela contredit l'hypothèse que les marées sont essentiellement dues à l'influence de la Lune. C'est évidemment faux. Les deux calculs effectués ci-dessus représentent en fait un cas ou tout les corps, Soleil, Lune et Terre, sont immobiles. Ce qui n'est pas du tout le cas.

Il ne faut donc pas seulement considérer l'influence gravifique de la Lune sur la Terre, mais aussi le mouvement de ces deux corps. En d'autres termes, il faut considérer la dynamique du système Terre-Lune à travers la deuxième loi de Newton tout prenant en compte une interaction due à la gravitation.

Le problème peut essentiellement être abordé de deux manières. La plus connue est celle qu'on désigne par « construction de Proctor ». Elle a le mérite de faire apparaître clairement la cause physique de la marée haute opposée à la lune. Elle a cependant le désavantage de procéder par une différence de deux forces qui ne s'appliquent pas au même endroit, ce qui pose des problèmes conceptuels dans l'emploi de la deuxième loi de Newton.

Dans le cadre de ce paragraphe, on va présenter la construction de Proctor, car elle a aussi le mérite de permettre une visualisation bidimensionnelle simple des forces de marée. Mais il ne faudra pas oublier qu'elle n'est que le résultat d'un développement bien plus rigoureux basé sur la deuxième loi de Newton. Ce développement est présenté en annexe J.

Pour comprendre la dynamique du système Terre-Lune, il faut s'imaginer la rotation de la Lune autour de la Terre. Si la Terre avait une masse infinie, la Lune tournerait autour du centre de la Terre. Or, ce n'est pas le cas. La Terre à une masse $M_{Terre} = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$ et la Lune une masse de $M_{Lune} = 7{,}35 \cdot 10^{22}\,\text{kg}$, ce qui représente pour la Lune un rapport p à la masse totale du système de :

$$\begin{aligned} p &= \frac{M_{Lune}}{M_{Terre} + M_{Lune}} \\ &= \frac{7,35 \cdot 10^2 2}{5,97 \cdot 10^{24} + 7,35 \cdot 10^2 2} = 0,012 = 1,2\% \end{aligned}$$

Ce n'est pas négligeable. En effet, pour cette raison, le centre de gravité du système Terre-Lune ne correspond pas au centre de la Terre. Il se situe à une distance du centre de la Terre correspondant au rapport de masses p calculé ci-dessus, soit $1,2\%$ de la distance Terre-Lune :

$$r = 0,012 \cdot 3,84 \cdot 10^5 = 4608\,\text{km}$$

Figure 3.7 – *Le système dynamique Terre-Lune*
Le centre de gravité du système C n'est pas au centre de la Terre.

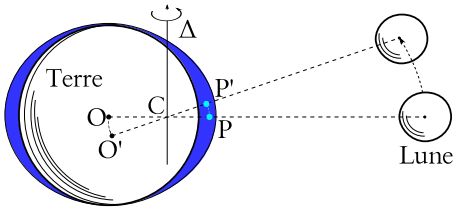
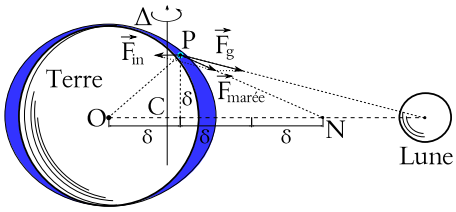


Figure 3.8 – *Marées : la construction de Proctor*
Richard Anthony Proctor, astronome anglais du XIX^e siècle.



Par rapport au rayon de la Terre, qui est de 6371 km, cela représente :

$$\frac{4608}{6371} = 72,3\%$$

Ainsi, la Lune ne tourne pas vraiment autour de la Terre mais autour du centre de gravité du système Terre-Lune. La figure 3.7 présente la situation. Le système tourne autour de l'axe Δ qui passe par le centre de gravité C. Le centre de la Terre O et le point P tournent aussi autour de cet axe, se déplaçant en O' et P'. En plus de la rotation diurne en 24 h sur elle-même, la Terre tourne donc autour du centre de gravité C en un mois environ. Cette rotation crée une pseudo-force dite centrifuge qui est à l'origine de la marée haute à l'opposé de la Lune, mais l'action existe aussi en PP'.

Il faut relever la complexité de cette action qui existe aussi pour les masses d'eau qui sont du côté de la Lune. L'ensemble de ces forces se traduit mathématiquement par une action très simple sur le centre de la Terre et, formellement, cela revient à considérer le rapport des forces de gravitation s'exerçant à la surface de la Terre avec celles s'exerçant au centre de celle-ci.

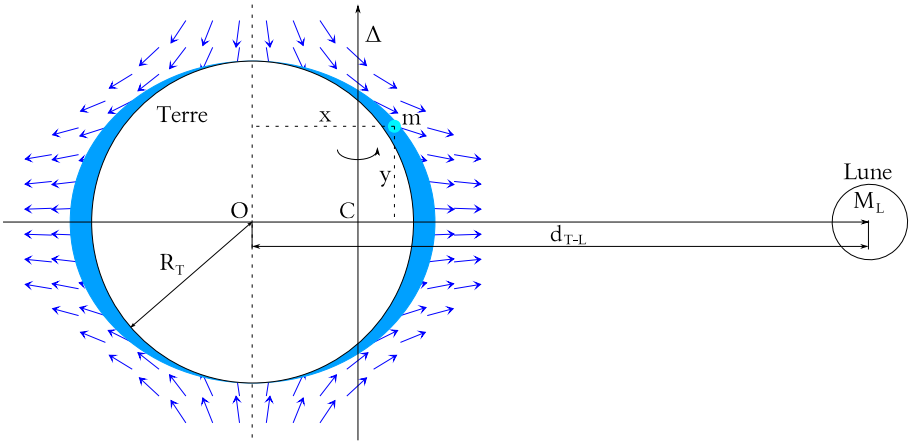
La figure 3.8 présente la situation. On y voit la décomposition de l'effet de marée $\overrightarrow{F}_{marée}$ en deux forces : l'attraction gravitationnelle de la Lune $\overrightarrow{F}_g$ et une force d'inertie $\overrightarrow{F}_{in}$.

En première analyse, on comprend bien en effet qu'une masse d'eau située au point P soit à la fois attirée par la Lune et soulevée vers l'extérieur par la rotation de la Terre autour du centre de gravité Terre-Lune. Si le point P était situé à l'opposé de la Lune, le raisonnement serait parfaitement justifié. Par contre, pour le point P indiqué (intentionnellement) sur la figure 3.8, on comprend mal que la force d'inertie soit dirigée *vers* l'axe de rotation. En réalité, il y a derrière la force d'inertie une physique des objets en rotation où cette pseudo-force joue un rôle différent des vraies forces. Il s'agit d'une physique des référentiels non inertiels décrite à l'annexe I. En fait, la force d'inertie devrait être appliquée au référentiel lié au centre de la Terre, soit au point O. En effet, il s'agit d'une pseudo-force, dite centrifuge, qui n'apparaît dans l'équation de Newton que dans le cas de référentiels en rotation. Comme la deuxième loi de Newton n'est valable que dans des référentiels inertiels, c'est-à-dire en translation uniforme les uns par rapport aux autres (voir annexe I), pour la préserver dans des référentiels en rotation, il faut y ajouter des pseudo-forces d'inertie traduisant le mouvement de rotation du référentiel. Dans ce cas particulier, il s'agit d'une pseudo-force centrifuge appliquée au centre de la Terre O et dirigée à l'opposé du centre de masse C du système Terre-Lune. L'annexe J donne le développement correct de ce problème sur l'axe Terre-Lune. Ce développement constitue une justification de la construction de Proctor. Il constitue aussi le cœur de l'explication newtonienne du phénomène de marée, puisqu'il a pour origine l'application de la deuxième loi de Newton et de la loi de la gravitation universelle.

De nos jours, le graphe du vecteur $\overrightarrow{F}_{marée}$ le long d'un méridien est relativement simple à réaliser avec un ordinateur. La construction de Proctor en permet le tracé approximatif sans calcul, puisque la direction de $\overrightarrow{F}_{marée}$ est celle qui relie le point d'application de la force au point N (sur la figure 3.8) dont la règle de Proctor dit qu'il est situé sur la ligne qui relie la Terre à la Lune, à trois fois la distance δ correspondant à la hauteur de la projection orthogonale du point P sur cette ligne.

Le résultat correspond au graphe du champ vectoriel le long du méridien présenté sur la figure 3.9.

Figure 3.9 – *Marées : le champ de forces*
Selon la construction de Proctor.



On peut montrer sur la base de la deuxième loi de Newton et de la loi de la gravitation universelle (voir (Gruber, 1988, p. 416)) que le vecteur $\overrightarrow{F}_{marée}$ correspondant à la force de marée s'exerçant sur une masse m d'eau située au point de coordonnées (x, y) d'un référentiel cartésien lié au centre de la Terre (dans le plan d'un méridien) vaut :

$$\overrightarrow{F}_{marée} = G \cdot \frac{M_L \cdot m}{d_{T-L}^3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot x \\ -y \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

Où M_L est la masse de la Lune et d_{T-L} la distance Terre-Lune.

L'expression de la force $\overrightarrow{F}_{marée}$ donnée par 3.19 trouve sa représentation graphique dans le champ de vecteurs représenté à la figure 3.9. On y voit l'attraction de la Lune sur les masses d'eau qui se trouvent de son côté et, de l'autre côté, l'effet de la force d'inertie (pseudo-force centrifuge). Deux marées hautes se trouvent donc aux antipodes l'une de l'autre. La Terre tournant sur elle-même bien plus rapidement que la Lune tourne autour d'elle, l'existence de deux marées par jour trouve donc ici une explication à travers l'application de la deuxième loi de Newton.

Remarquez aussi la symétrie du champ de forces par rapport à l'axe (en traitillé sur la figure 3.9) passant par le centre O de la Terre. Mais, attention, cet axe ne correspond pas à l'axe de rotation diurne de la Terre sur elle-même. En effet, il est perpendiculaire au plan de rotation de la Lune autour de la Terre qui fait un angle de $5°9'$ par rapport au plan de l'écliptique (le plan de rotation de la terre autour du Soleil). Comme le plan équatorial, lui-même perpendiculaire à l'axe de rotation diurne de la Terre, fait un angle de $23°26'$ avec le plan de l'écliptique, l'axe de rotation de la Terre sur elle-même et celui du système Terre-Lune ne correspondent pas.

Si déterminer par calcul la force de marée s'exerçant sur une masse donnée d'eau constitue un grand progrès, cette explication peut sembler limitée puisqu'elle ne prédit pas directement les hauteurs d'eau. Et la vérification de l'expression de la force peut sembler de prime abord difficile à réaliser.

Pour comprendre dans quelle mesure l'explication newtonienne correspond numériquement avec les observations, considérons une forme réduite de l'équation 3.19. Il s'agit de l'expression de celle-ci sur une masse m d'eau située sur l'axe Terre-Lune. La détermination de cette force est présentée à l'annexe J, équation J.8, page 201. Le résultat est le suivant :

$$F_{marée} = 2 \cdot G \cdot \frac{M_L \cdot m}{d_{T-L}^3} \cdot R_T \tag{3.20}$$

Évidemment, cette force est proportionnelle à la masse M_L de la Lune, puisque la marée est en partie due à la force de gravitation. Mais, contrairement à la loi de la gravitation, elle n'est pas inversement proportionnelle au carré de la distance Terre-Lune, car elle est aussi en partie due à la force d'inertie

(ou pseudo-force centrifuge). La somme de ces deux forces (de gravitation et d'inertie) varie comme l'inverse du *cube* de la distance Terre-Lune. C'est là une différence importante qui va permettre de déterminer le rapport d'influence de la Lune et du Soleil sur les masses océaniques.

On a vu que le rapport des forces gravifiques exercées par la Lune et par le Soleil sur une masse d'eau vaut $r = 177,7$ (voir équation 3.18). Ce qui est en contradiction avec l'observation qui montre une influence prédominante de la Lune sur le Soleil. Cette contradiction tient au fait que la force d'inertie a été négligée. Pour en tenir compte, on peut recalculer le rapport r à partir de l'équation 3.20 appliquée à la Lune et au Soleil :

$$F_{marée}^{Lune} = 2 \cdot G \cdot \frac{M_L \cdot m}{d_{T-L}^3} \cdot R_T \tag{3.21}$$

$$F_{marée}^{Soleil} = 2 \cdot G \cdot \frac{M_S \cdot m}{d_{T-S}^3} \cdot R_T \tag{3.22}$$

Le rapport s'exprime alors par :

$$\begin{aligned} r &= \frac{F_{marée}^{Soleil}}{F_{marée}^{Lune}} = \frac{M_S/d_{T-S}^3}{M_L/d_{T-L}^3} \\ &= \frac{M_S}{M_L}\left(\frac{d_{T-L}}{d_{T-S}}\right)^3 = \frac{1,99 \cdot 10^{30}}{7,35 \cdot 10^{22}}\left(\frac{3,84 \cdot 10^8}{1,50 \cdot 10^{11}}\right)^3 \\ &= 0,46 \end{aligned} \tag{3.23}$$

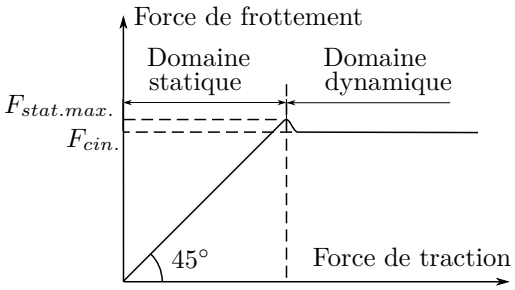
Ce rapport correspond à une influence plus importante de la Lune par rapport au Soleil d'environ $1/0,46 = 2,17\times$. Pour les marées océaniques (en plein océan et non côtières où d'autres phénomènes entrent en jeu) ce rapport est bien vérifié, ce qui lève la contradiction évoquée précédemment et confirme la théorie de Newton.

On en restera là pour un première analyse du phénomène de marée grâce à la théorie de la gravitation et à la dynamique newtonienne. Mais bien d'autres aspects devraient être évoqués. Quelques uns le sont dans l'annexe J. Cependant, comme déjà dit, ils ne sortent pas du cadre de l'explication astronomique, celle exprimée en termes d'ondes n'étant pas du niveau de ce cours.

Le frottement

Pour comprendre la force de frottement, il faut réaliser l'expérience suivante :

Figure 3.10 – *La force de frottement*



on tire avec un dynamomètre une masse posée sur une table. Pendant un premier temps, la masse ne bouge pas. Cela signifie que la force qu'on exerce est égale à la force de frottement. Même si on tire de plus en plus fort, la masse ne bouge pas. Donc, la force de frottement augmente en même temps et dans la même mesure que celle que l'on exerce. C'est le cas jusqu'à un certain point nommé « imminence de glissement ». A ce moment-là, la force de frottement, dite « statique » parce que le masse ne bouge pas encore, est maximale. Si on augmente encore, ne serait-ce qu'un tout petit peu, la force de traction, la masse se met en mouvement et on constate en général que la force de frottement diminue légèrement. Ensuite, même si on augmente la force de traction, la force de frottement ne varie plus. Ce comportement est résumé sur le graphique de la figure 3.10.

Par ailleurs, pour un frottement de type sec, c'est-à-dire entre deux surfaces solides (voir figure 3.11), on montre que la force ne dépend pas de la surface de frottement, mais seulement de la nature des surfaces et de la réaction du sol (la force exercée par le sol sur la masse). Ainsi, on peut écrire :

$$\boxed{F_{frott.\,stat.\,max} = \mu_o \cdot N} \tag{3.24}$$

où μ_o est le cœfficient de frottement statique qui traduit l'influence de la nature des surfaces et N est la force de réaction. De la même manière, on a aussi :

$$\boxed{F_{frott.\,cin.} = \mu_c \cdot N} \tag{3.25}$$

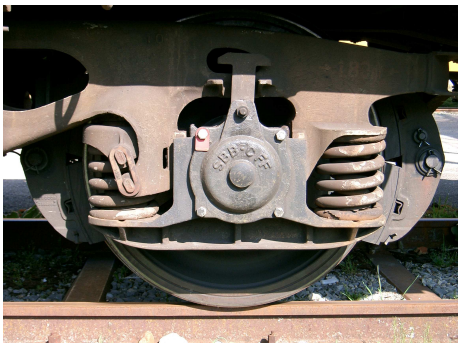
où μ_c est le cœfficient de frottement cinétique.

D'autre part, on a, comme la figure 3.10 le montre, la relation suivante :

$$\mu_o \geq \mu_c$$

Figure 3.11 – *Freins de wagon*

Figure 3.12 – *Essieu de wagon*



Enfin, il faut relever qu'en réalité la situation est plus complexe. Même si le modèle de la force de frottement cinétique présente une force indépendante de la vitesse, on peut observer des variations en fonction de la vitesse (notamment une décroissance). De plus, sa linéarité en fonction de la réaction normale du sol n'est pas toujours exacte. Il s'agit donc d'un modèle qui a ses limites.

Exemple Calculez la distance de freinage d'une voiture roulant à 50 km/h sur une route mouillée dont les cœfficients de frottement avec les pneus valent : $\mu_o = 0,4$ et $\mu_c = 0,3$. Le conducteur ne sait pas freiner.

Solution :

Comme le conducteur ne sait pas freiner, il bloque les roues et elles glissent sur la chaussée. Le cœfficient de frottement est donc $\mu_c = 0,3$. La force de frottement vaut alors :

$$F_{frot.} = \mu_c \cdot N = \mu_c \cdot m \cdot g$$

et, la deuxième loi de Newton implique :

$$a = \frac{F_{frot.}}{m} = \frac{\mu_c \cdot m \cdot g}{m} = \mu_c \cdot g$$
$$= 0,3 \cdot 9,81 = 2{,}943\,\mathrm{m/s^2}$$

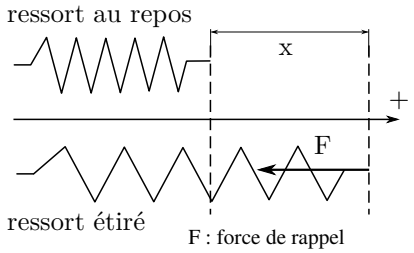
Par ailleurs, on a aussi : $v^2 = v_o^2 + 2 \cdot a \cdot d$

Ainsi, on tire :

$$d = \frac{v^2 - v_o^2}{2 \cdot a} = \frac{0^2 - 13,9^2}{2 \cdot (-2,943)} = 32{,}8\,\mathrm{m}$$

Car 50 km/h = 13,9 m/s et $a < 0$ pour une décélération.

Figure 3.13 – *Force élastique d'un ressort*



La force d'un ressort

Il est particulièrement intéressant de comprendre comment agit la force d'un ressort. En effet, c'est un premier modèle traduisant les liaisons interatomiques à l'intérieur d'un cristal par exemple. Mais beaucoup d'autres cas pourraient être présentés (voir figure 3.12).

Dans le domaine où le ressort a un comportement plastique (c'est-à-dire quand sa variation de longueur est parfaitement réversible), on montre que l'expression donnant le force de rappel par rapport à l'état d'équilibre où le ressort est détendu, est :

$$\boxed{F = -k \cdot x} \tag{3.26}$$

où k appelée *constante du ressort*, traduit sa « dureté » et s'exprime en N/m. Le signe négatif vient du fait que si le ressort est étiré c'est une force de rappel dirigée dans le sens contraire de l'axe.

Exemple On suspend à un ressort de constante $k = 200\,\mathrm{N/m}$ une masse de 2 kg. Calculez son allongement.

Solution :

L'équilibre des forces (le poids vers le bas et la force de rappel du ressort vers le haut) mène à la solution suivante :

$$m \cdot g = k \cdot x \Rightarrow x = \frac{m \cdot g}{k} = \frac{2 \cdot 9,81}{200} = 9{,}81\,\text{cm}$$

Résumé des grandeurs et unités

Grandeur	**Symbole**	**Unité**
Distance	r	m
Masse	m, M	kg
Force	F	N
Constante de la gravitation	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$	$\mathrm{N\,m^2/kg^2}$
Coefficient de frottement	μ	-
Constante du ressort	k	N/m

Résumé des lois de la dynamique

Lois de Newton et **Forces**

Les lois fondamentales de la dynamique :

$$MRU \Leftrightarrow \Sigma \overrightarrow{F}^{ext} = 0 \tag{3.27}$$

$$\Sigma \overrightarrow{F}^{ext} = m \cdot \overrightarrow{a} \tag{3.28}$$

$$\overrightarrow{Action} = -\overrightarrow{Réaction} \tag{3.29}$$

(3.30)

Quelques lois :

$$\overrightarrow{P} = m \cdot \overrightarrow{g} \tag{3.31}$$

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \tag{3.32}$$

$$F = -k \cdot x \tag{3.33}$$

$$F = \mu \cdot N \tag{3.34}$$

MCU : force centripète de natures diverses

$$F_c = m \cdot \frac{v^2}{R} \;\Rightarrow\; a_c = \frac{v^2}{R} \tag{3.35}$$

Figure 3.14 – *Résumé de mécanique*

Chapitre 4

Mécanique en plusieurs dimensions

4.1 Préliminaires

La cinématique en plusieurs dimensions présente un changement important dans les outils nécessaires pour son traitement par rapport à celle en une dimension. En effet, la présence de plusieurs dimensions nécessite un traitement vectoriel des équations. Celui-ci peut être assez complexe. C'est pourquoi, nous allons maintenant traiter de cet aspect de la mécanique.

4.1.1 Dimensions

On dira du mouvement d'un système qu'il est bidimensionnel ou en deux dimensions quand il se fait dans un plan.

On dira du mouvement d'un système qu'il est tridimensionnel ou en trois dimensions quand il se fait dans tout l'espace.

4.1.2 Système d'axes

Le système d'axes généralement utilisé pour décrire le mouvement en deux dimensions est cartésien, c'est-à-dire qu'il est composé de deux axes perpendiculaires notés x et y et d'une unité identique pour les deux axes. On dit aussi que ce système est orthonormé.

Le système d'axes généralement utilisé pour décrire le mouvement en trois dimensions est cartésien, c'est-à-dire qu'il est composé de trois axes perpendiculaires notés x, y et z et d'une unité identique pour les trois axes. On dit aussi que ce système est orthonormé.

4.2 Notion de vecteur en physique

Sans entrer dans une définition mathématique rigoureuse de la notion de vecteur, nous pouvons définir un vecteur comme un objet mathématique ayant les propriétés suivantes : une direction, un sens et une grandeur. On peut facilement se représenter cet objet en pensant à une flèche.

Beaucoup de grandeurs physique peuvent être représentées par des vecteurs. Cela concerne les grandeurs qui ont une direction, un sens et une intensité. Un exemple simple est celui de la vitesse. Celle-ci à manifestement une direction, un sens et une grandeur.

4.2.1 Norme d'un vecteur

On parle de grandeur pour exprimer de la norme du vecteur. On parle aussi de la valeur, de l'intensité voire de la longueur du vecteur, même s'il ne s'agit pas à proprement parler de la longueur du vecteur, mais de sa norme. Dans le cas du vecteur vitesse, par exemple, elle s'exprimerait en m/s, et non dans les unités d'une longueur. En physique, par souci de simplicité, on note la norme d'un vecteur $\overrightarrow{F}$ sous la forme F. On a donc l'équivalence suivante : $F = ||\overrightarrow{F}||$. Ainsi, le symbole d'un vecteur noté sans flèche au-dessus de lui représente sa norme.

4.2.2 Opérations vectorielles

Nous aurons besoin par la suite des deux opérations mathématiques entre vecteurs. L'une opère un produit entre deux vecteurs qui donne un nombre. C'est le produit scalaire. Il existe pour des vecteurs à deux dimensions. L'autre opère un produit entre deux vecteurs qui donne un vecteur. C'est le produit vectoriel. Comme le vecteur produit est perpendiculaire aux deux vecteurs utilisés, il n'existe qu'en trois dimensions. C'est pourquoi nous ne le traiterons pas dans ce chapitre.

produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{d}$ se note $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d}$. C'est un nombre qu'on peut noter A, par exemple.

Il existe alors, compte tenu de la remarque qui précède, deux manière de calculer A à partir de $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{d}$.

Premièrement, on a :

$$A = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d} = F \cdot d \cdot \cos(\alpha)$$

où l'angle α est l'angle aigu entre les deux vecteurs $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{d}$.

Secondement, on a :

$$\begin{aligned} A = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d} &= \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} \\ &= F_x \cdot d_x + F_y \cdot d_y \end{aligned}$$

Bien évidemment les unités de la grandeur obtenue par un produit scalaire sont la simple multiplication des unités des grandeurs composant l'opération.

Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{d}$ se note $\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{d}$. C'est un vecteur qu'on peut noter $\overrightarrow{M}$, par exemple.

Il existe alors, compte tenu de la remarque qui précède, deux manière de calculer $\overrightarrow{M}$ à partir de $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{d}$.

Premièrement, on a :

$$M = ||\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{d}|| = F \cdot d \cdot \sin(\alpha)$$

où l'angle α est l'angle aigu entre les deux vecteurs $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{d}$.

Secondement, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M} = \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{d} &= \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_y \cdot d_z - F_z \cdot d_y \\ F_z \cdot d_x - F_x \cdot d_z \\ F_x \cdot d_y - F_y \cdot d_x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bien évidemment les unités de la grandeur obtenue par un produit scalaire sont la simple multiplication des unités des grandeurs composant l'opération.

4.3 Mécanique

Beaucoup de grandeurs physiques sont vectorielles. Nous avons déjà vu de les grandeurs cinématiques de position $\overrightarrow{x}$, de vitesse $\overrightarrow{v}$ et d'accélération $\overrightarrow{a}$ sont vectorielles. La notion de force $\overrightarrow{F}$ l'est aussi, comme celle de moment $\overrightarrow{M}$ ou de quantité de mouvement $\overrightarrow{p}$. La mécanique en plusieurs dimensions est donc en cela différente de celle en une dimension. Nous allons voir maintenant dans quelle mesure seuls les termes changent et dans quelles mesure les concepts changent aussi.

4.3.1 Cinématique

Position

La position d'un point dans un plan est donnée par un vecteur noté $\overrightarrow{r}$, dont les composantes sont les deux coordonnées du point. Par exemple, on pourrait avoir :

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ cm}$$

On trouve aussi la notation $\overrightarrow{x}$ qui est délicate car on note aussi x la première coordonnée du vecteur $\overrightarrow{x}$. Ainsi, on écrirait :

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ cm}$$

Vitesse

La vitesse d'un objet dans un plan est donnée par un vecteur noté $\overrightarrow{v}$. Ainsi, on pourrait avoir :

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ m/s}$$

La définition de la vitesse moyenne $\overrightarrow{\overline{v}}$ devient donc :

$$\boxed{\overrightarrow{\overline{v}} = \frac{\Delta \overrightarrow{x}}{\Delta t}} \tag{4.1}$$

et celle de la vitesse instantanée $\overrightarrow{v}$:

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{x}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{x}}{dt}} \tag{4.2}$$

Accélération

Bien évidemment, l'accélération est aussi donnée par un vecteur noté $\overrightarrow{a}$.

La définition de l'accélération moyenne $\overrightarrow{\overline{a}}$ devient donc :

$$\boxed{\overrightarrow{\overline{a}} = \frac{\Delta \overrightarrow{v}}{\Delta t}} \tag{4.3}$$

et celle de l'accélération instantanée $\overrightarrow{a}$:

$$\boxed{\overrightarrow{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{v}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}} \tag{4.4}$$

Ainsi, toute la cinématique peut être traité vectoriellement. De plus, naturellement, la représentation d'un vecteur en deux dimensions est la même que celle d'un vecteur en trois (ou quatre, pour la relativité) dimensions.

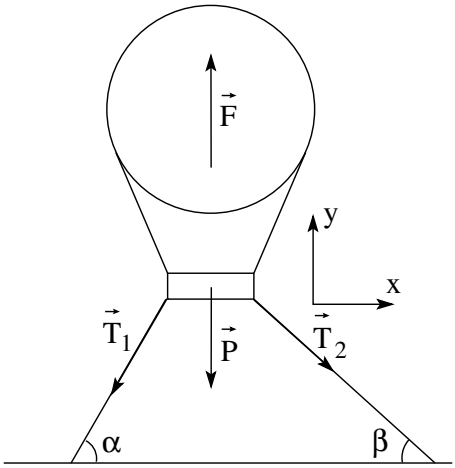
4.3.2 Dynamique

Bien évidemment, les trois lois de Newton s'expriment sous forme vectorielle. La force $\overrightarrow{F}$ et l'accélération $\overrightarrow{a}$, comme nous l'avons déjà vu, sont des grandeurs vectorielles. On peut donc exprimer cet trois lois ainsi :

Première loi

$$\boxed{MRU \Leftrightarrow \sum \overrightarrow{F^{ext}} = 0} \tag{4.5}$$

Figure 4.1 – *Équilibre statique*



Seconde loi

$$\boxed{\sum \overrightarrow{F^{ext}} = m \cdot \overrightarrow{a}} \tag{4.6}$$

Troisième loi

$$\boxed{\overrightarrow{Action} = -\overrightarrow{Réaction}} \tag{4.7}$$

4.4 Exemples

Le caractère vectoriel de ces trois lois a de nombreuses conséquences que nous allons maintenant illustrer à travers différents exemples. Relevons aussi que le caractère vectoriel des relations utilisée implique une importante utilisation de la trigonométrie. Nous renvoyons le lecteur à des cours de mathématiques pour aborder ce domaine que nous supposons ici connu.

4.4.1 Statique

Dans le cas où le système ne bouge pas, l'accélération est nulle et la seconde loi de Newton s'écrit :

$$\sum \overrightarrow{F^{ext}} = \overrightarrow{0}$$

Ce sont les équations qui régissent l'équilibre statique des forces. Un exemple plus précis peut être

donné en considérant un ballon attachée au sol par deux cordes qui font des angles α et β respectivement avec le sol, comme décrit par la figure 4.1. Connaissant la masse du ballon $m = 100\,kg$ et la poussée $\overrightarrow{F}$ du gaz sur le ballon, on peut se demander quelle est la valeur des forces $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$ exercées sur les cordes qui le retiennent au sol. On considère que celles-ci sont souples et par conséquent que les forces $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$ leur sont parallèles.

Réponse : Il faut écrire les équations de la seconde loi de Newton sur chaque axe :

$$\text{sur x : } \sum F_x = 0$$
$$\text{sur y : } \sum F_y = 0$$

Pour cela, il faut trouver les composantes de chaque forces sur les axes. Le poids $\overrightarrow{P}$ et la force de poussée $\overrightarrow{F}$ sont toutes deux verticales, mais par rapport au système d'axes choisi sur la figure 4.1, la composante verticale du poids est négative. En ce qui concerne les tensions, considérant que les angles α et β sont comptés par rapport à l'horizontale, on peut écrire, en tenant compte des signes de chaque composante par rapport au système d'axes :

$$T_{1x} = -T_1 \cdot \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad T_{1y} = -T_1 \cdot \sin(\alpha)$$
$$T_{2x} = T_2 \cdot \cos(\beta) \quad \text{et} \quad T_{2y} = -T_2 \cdot \sin(\beta)$$

On peut alors écrire les équations du mouvement :

$$\text{sur x :} \quad T_2 \cdot \cos(\beta) - T_1 \cdot \cos(\alpha) = 0$$
$$\text{sur y :} \quad F - P - T_1 \cdot \sin(\alpha) - T_2 \cdot \sin(\beta) = 0$$

Nous sommes alors en présence d'un système de deux équations à deux inconnues : T_1 et T_2. De la première équation, on tire T_2 :

$$T_2 = \frac{T_1 \cdot \cos(\alpha)}{\cos(\beta)}$$

et on remplace dans la seconde :

$$F - P - T_1 \cdot \sin(\alpha) - T_1 \cdot \cos(\alpha) \cdot \tan(\beta) = 0$$

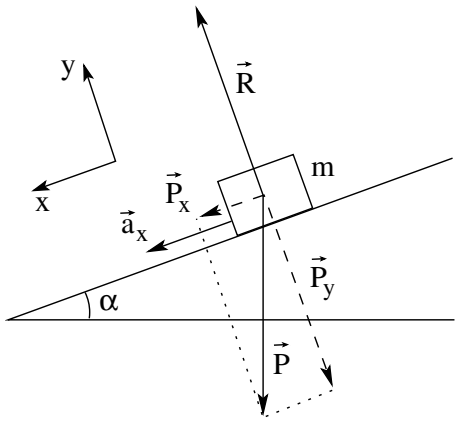
où on a utilisé la définition de la tangente :

$$\tan(\beta) = \sin(\beta)/\cos(\beta)$$

En mettant en évidence T_1 et le déplaçant à droite de l'équation, on a :

$$F - P = T_1 \cdot (\sin(\alpha) + \sin(\beta))$$

Figure 4.2 – *Le plan incliné*



et donc finalement avec $P = m \cdot g$:

$$T_1 = \frac{F - m \cdot g}{\sin(\alpha) + \sin(\beta)}$$

et pour T_2 :

$$T_2 = \frac{(F - m \cdot g) \cdot \cos(\alpha)}{\cos(\beta) \cdot (\sin(\alpha) + \sin(\beta))}$$

4.4.2 Plan incliné

A l'instar de la chute libre, on peut considérer le problème historique [a] suivant :

déterminez l'accélération d'une masse m qui glisse le long d'un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. On néglige les frottements.
Réponse :

Comme le montre la figure 4.2, deux forces extérieures seulement s'exercent sur la masse m. Il s'agit de son poids $\overrightarrow{P}$ et de la réaction du plan incliné $\overrightarrow{R}$. Celle-ci est perpendiculaire au plan, car il n'y a pas de frottement. On prend pour système la masse m. Pour écrire les équations du mouvement, on doit choisir un système d'axes approprié. Dans ce cas particulier, nous allons tout d'abord choisir le système d'axes dessiné sur la figure 4.2. Il faut alors écrire la seconde loi de Newton sur chaque

a. Cela serait la manière selon laquelle Galilée à procédé pour trouver la dépendance de la hauteur de chute d'un objet en fonction du carré du temps écoulé.

axe :

$$\text{sur x : } \sum F_x = m \cdot a_x$$
$$\text{sur y : } \sum F_y = m \cdot a_y$$

On doit donc décomposer chaque forces sur les axes pour pouvoir en faire la somme. Sur la figure 4.2, les composantes du poids sont notées $\overrightarrow{P_x}$ et $\overrightarrow{P_y}$. L'angle α du plan incliné se retrouvant entre le vecteur $\overrightarrow{P}$ et sa composante $\overrightarrow{P_y}$, clairement, on a :

$$P_x = P \cdot \sin(\alpha)$$
$$P_y = P \cdot \cos(\alpha)$$

Ainsi, on peut écrire en tenant compte du signe négatif de P_y qui indique que son sens est opposé à celui de l'axe y :

$$\text{sur x : } \quad P \cdot \sin(\alpha) = m \cdot a_x$$
$$\text{sur y : } \quad R - P \cdot \cos(\alpha) = m \cdot a_y$$

car, $\overrightarrow{P}$ n'a de composante que sur l'axe y. Or, l'accélération sur l'axe y est manifestement nulle. En effet, la masse ne s'enfonce pas dans le plan et ne décolle pas. Par ailleurs, par définition du poids, on a : $P = m \cdot g$. On en déduit que :

$$\text{sur x : } \quad m \cdot g \cdot \sin(\alpha) = m \cdot a_x$$
$$\text{sur y : } \quad R - m \cdot g \cdot \cos(\alpha) = 0$$

Et donc, si on pose $a = a_x$ (comme $a_y = 0$) :

$$\text{sur x : } \quad a = g \cdot \sin(\alpha)$$
$$\text{sur y : } \quad R = m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$

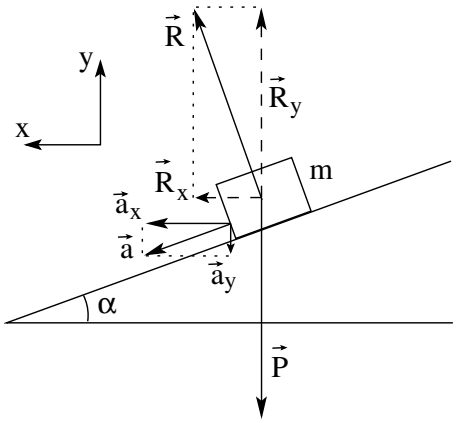
La solution est donc trouvée. En plus de celle-ci on a aussi obtenu à l'aide de l'équation du mouvement sur l'axe y la valeur de R (qui n'était pas demandée).

La résolution de ce problème peut aussi se faire dans un système d'axes vertical et horizontal, comme présenté dans la figure 4.3.

On voit que la décomposition des forces sur les axes n'est pas plus complexe que précédemment. Ce qui change, c'est que l'accélération aussi doit être décomposée. En effet, aucune des deux composantes n'est maintenant nulle. Ainsi, les équations du mouvement deviennent (en tenant compte des signes) :

$$\text{sur x : } \quad R_x = m \cdot a_x$$
$$\text{sur y : } \quad R_y - m \cdot g = -m \cdot a_y$$

Figure 4.3 – *Le plan incliné*



Manifestement, l'angle α se retrouve entre $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{R_y}$ et entre $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{a_x}$. On peut donc écrire :

$$R_y = R \cdot \cos(\alpha)$$
$$R_x = R \cdot \sin(\alpha)$$

et :

$$a_x = a \cdot \cos(\alpha)$$
$$a_y = a \cdot \sin(\alpha)$$

et les équations deviennent :

$$\text{sur x : } \quad R \cdot \sin(\alpha) = m \cdot a \cdot \cos(\alpha)$$
$$\text{sur y : } \quad R \cdot \cos(\alpha) - m \cdot g = -m \cdot a \cdot \sin(\alpha)$$

Il s'agit d'un système de deux équations à deux inconnues R et a.

On tire R de la première équation :

$$R = \frac{m \cdot a \cdot \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

et on remplace dans la dernière :

$$\frac{m \cdot a \cdot \cos^2(\alpha)}{\sin(\alpha)} - m \cdot g = -m \cdot a \cdot \sin(\alpha)$$

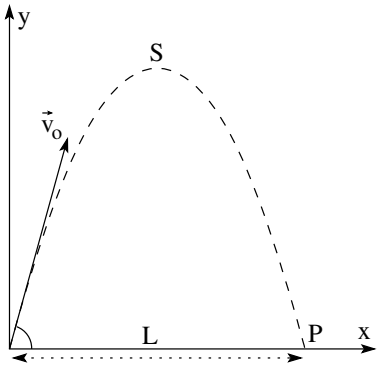
C'est-à-dire, en multipliant par $\sin(\alpha)$:

$$ma \cdot \cos^2(\alpha) - mg \cdot \sin(\alpha) = -ma \cdot \sin^2(\alpha)$$

ou en réorganisant les termes :

$$m \cdot a \cdot (\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)) = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

Figure 4.4 – *Tir balistique*



Et comme $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, on a :

$$m \cdot a = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

Soit, finalement le même résultat que précédemment :

$$a = g \cdot \sin(\alpha)$$

Le calcul est cependant bien plus long. Il est donc important de bien choisir le système d'axes pour minimiser les développements algébriques et par conséquent les fautes de calcul.

4.4.3 Balistique

Nous avons déjà parlé de balistique au paragraphe 2.5.4 pour illustrer les MRU et MRUA. Le cas balistique qui va être considéré ici est celui, classique, d'un projectile tiré depuis l'origine d'un système d'axes avec une vitesse $\overrightarrow{v_o}$ faisant un angle α avec l'horizontale (voir figure 4.4).

Il s'agit :

1. d'établir l'équation de la trajectoire,
2. de calculer les coordonnées du point le plus haut,
3. de trouver la portée du tir,
4. de déterminer l'angle pour atteindre un point C de coordonnées $(x_1; y_1)$ et
5. d'obtenir l'équation de la parabole de sécurité du tir.

Voyons comment procéder :

1. En tenant compte de la seconde loi de Newton, on a :

$$m \cdot \overrightarrow{g} = m \cdot \overrightarrow{a}$$

C'est-à-dire, en tenant compte du sens des axes :

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Ainsi, avec les conditions initiales données, les équations du mouvement sur les axes sont les suivantes :

sur x :

$$\begin{aligned} x &= v_{ox} \cdot t + x_o = v_{ox} \cdot t \\ v_x &= v_{ox} = v_o \cdot \cos(\alpha) \\ a_x &= 0 \end{aligned}$$

sur y :

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_{oy} \cdot t + y_o \\ &= -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_{oy} \cdot t \\ v_y &= -g \cdot t + v_{oy} = -g \cdot t + v_o \cdot \sin(\alpha) \\ a_y &= -g \end{aligned}$$

On tire alors t de l'équation de la position sur x :

$$t = \frac{x}{v_o \cdot \cos(\alpha)}$$

Et on le remplace dans l'équation de la position sur y :

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2} \cdot g \left(\frac{x}{v_o \cdot \cos(\alpha)} \right)^2 + v_o \cdot \sin(\alpha) \cdot t \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_o^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x \end{aligned}$$

Cette équation est de la forme

$$y(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$$

C'est l'expression d'une parabole.

2. Pour trouver le point S le plus haut, il suffit de considérer le fait qu'en ce point, la composante verticale de la vitesse est nulle. Ainsi, on peut trouver t_S, le temps mis pour atteindre le sommet S :

$$\begin{aligned} v_y = 0 \Rightarrow 0 &= -g \cdot t_S + v_o \cdot \sin(\alpha) \\ \Rightarrow t_S &= \frac{v_o \cdot \sin(\alpha)}{g} \end{aligned}$$

Puis, il suffit de remplacer ce temps dans les équations de la position sur chaque axes :

$$\begin{aligned} x_S &= v_o \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{v_o \cdot \sin(\alpha)}{g} \\ &= \frac{v_o^2}{g} \cdot \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ y_S &= -\frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v_o \cdot \sin(\alpha)}{g}\right)^2 + \frac{v_o^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{g} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{v_o^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{g} \end{aligned}$$

3. Le temps mis par le projectile pour retomber au sol est par symétrie le double de t_S. On peut le vérifier en posant $y = 0$ dans l'équation de la position sur l'axe vertical. On obtient :

$$t_P = 2 \cdot \frac{v_o \cdot \sin(\alpha)}{g}$$

Ce qui nous permet de déterminer la portée L du projectile :

$$\begin{aligned} x_P = L &= v_o \cdot \cos(\alpha) \cdot 2 \cdot \frac{v_o \cdot \sin(\alpha)}{g} \\ &= 2 \cdot \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ &= \frac{v_o^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Car, $2 \cdot \sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(2 \cdot \alpha)$.
Une conséquence de ce résultat est qu'on peut déterminer l'angle sous lequel on doit tirer pour que le tir une porté L :

$$\begin{aligned} L = \frac{v_o^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) \;&\Rightarrow\; \sin(2 \cdot \alpha) = \frac{g \cdot L}{v_o^2} \\ \Rightarrow\; \alpha &= \arcsin(\frac{g \cdot L}{v_o^2}) \end{aligned}$$

4. Pour déterminer l'angle nécessaire pour atteindre le point C de coordonnée $(x_1; y_1)$, il faut partir de l'équation de la parabole appliquée au point C :

$$y_1 = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x_1}{v_o}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2(\alpha)} + x_1 \cdot \tan(\alpha)$$

et isoler $\tan(\alpha)$. Mathématiquement, on a que $1/\cos^2(\alpha) = 1 + \tan^2(\alpha)$. Ainsi :

$$y_1 = -\frac{g}{2} \cdot \left(\frac{x_1}{v_o}\right)^2 (1 + \tan^2(\alpha)) + x_1 \cdot \tan(\alpha)$$

Et on obtient une équation du second degré en $\tan(\alpha)$:

$$-\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x_1}{v_o}\right)^2 \cdot \tan^2(\alpha) + x_1 \cdot \tan(\alpha)$$

$$-(y - 1 + \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x_1}{v_o}\right)^2) = 0$$

Ainsi, on a pour solution :

$$\tan(\alpha) = \frac{-x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} g \left(\frac{x_1}{v_o}\right)^2 \left(y_1 + \frac{1}{2} g \left(\frac{x_1}{v_o}\right)^2\right)}}{-2 \cdot \frac{1}{2} g \left(\frac{x_1}{v_o}\right)^2}$$

Ainsi, en fonction de la valeur du discriminant Δ :

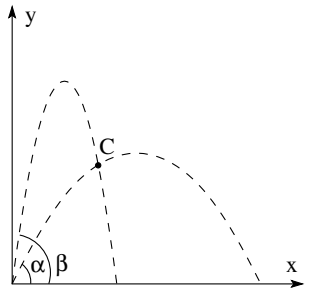
$$\Delta = -x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - \frac{4}{2} g \left(\frac{x_1}{v_o}\right)^2 \left(y_1 + \frac{1}{2} g \left(\frac{x_1}{v_o}\right)^2\right)}$$

on peut avoir trois cas :

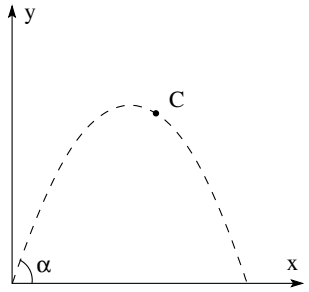
- si $\Delta > 0$, à cause du $\pm$, deux angles de tir sont possible. C peut être atteint à la montée ou à la descente (voir figure 4.5(a))
- si $\Delta = 0$, un seul angle est possible. C n'est en général pas atteint au sommet de la trajectoire (voir figure 4.5(b)). Ce n'est le cas que pour un angle de 90°.
- si $\Delta < 0$, comme la racine d'un nombre négatif n'existe pas, aucun angle ne permet d'atteindre C. On dit que C est hors de portée ou hors de la parabole de sécurité (voir figure 4.6).

5. Le lieu des points qui ne peuvent être atteint qu'avec un seul angle est appelé « parabole de sécurité ». En effet, il définit les zones dans lesquelles un point peut être ou ne pas être atteint. La figure 4.6 montre clairement cette frontière.

   Il faut relever que les points qui ne peuvent être atteints que sous un seul angle ne correspondent pas aux sommets des paraboles de tir (sauf pour le tir à la verticale). On peut voir sur la figure 4.6 que les sommets des paraboles de tir sont à l'intérieur de la parabole de sécurité.



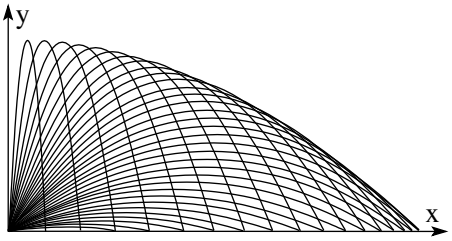
(a) Deux angles



(b) Un angle

Figure 4.5 – *Tirs balistiques*

Figure 4.6 – *Parabole de sécurité*



Pour en obtenir l'équation, il suffit d'annuler le discriminant Δ vu au point précédent. Ainsi, on a :

$$\Delta = x_1^2 - 2g \cdot \frac{x_1^2}{v_o^2} \cdot (y_1 + \frac{1}{2} g \left(\frac{x_1}{v_o}\right)^2) = 0$$

et donc :

$$x_1^2 = 2g \cdot \frac{x_1^2}{v_o^2} \cdot (y_1 + \frac{1}{2} g \left(\frac{x_1}{v_o}\right)^2)$$

$$x_1^2 = 2g \cdot \frac{x_1^2}{v_o^2} \cdot y_1 + g^2 \cdot \left(\frac{x_1}{v_o}\right)^4$$

$$1 = 2g \cdot \frac{y_1}{v_o^2} + g^2 \cdot \frac{x_1^2}{v_o^4}$$

$$1 = \frac{g}{v_o^2} \cdot (2y_1 + \frac{g x_1^2}{v_o^2})$$

$$\frac{v_o^2}{g} = 2y_1 + \frac{g x_1^2}{v_o^2}$$

Ce qui donne en définitive l'équation d'une parabole :

$$y_1 = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_o^2} \cdot x_1^2 + \frac{1}{2}\frac{v_o^2}{g}$$

4.4.4 Mouvement circulaire uniforme : MCU

Définition

Le mouvement circulaire uniforme (MCU) traduit le déplacement d'un objet sur un cercle et à vitesse constante. Il est intéressant d'étudier ce mouvement qui, tout en se déroulant à vitesse constante, est produit par une accélération non nulle.

Cinématique

La cinématique du mouvement circulaire uniforme est identique à celle du MRU si on remplace les distances par des angles. Ainsi, en guise de position, on prendra l'angle des coordonnées circulaires (voir figure B.1). A partir de là, la vitesse et l'accélération angulaires moyennes se définissent très simplement :

$$x(t) \quad \rightarrow \quad \theta(t)$$

$$\overline{v}(t) \quad \rightarrow \quad \overline{\omega}(t) = \frac{\theta - \theta_o}{t - t_o} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\overline{a}(t) \quad \rightarrow \quad \overline{\alpha}(t) = \frac{\omega - \omega_o}{t - t_o} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Bien entendu, on a aussi pour les grandeurs instantanées :

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

Ce définitions sont valables pour tout mouvement circulaire, en particulier s'il n'est pas uniforme. Dans le cas d'un MCU, on a encore : $\omega(t) = \omega_o$ et $\alpha(t) = 0\, m/s^2$.

Par ailleurs, la relation liant le rayon d'un arc de cercle à la valeur de ce dernier, relation traduite dans la figure A.1, permet de relier les grandeurs linéaires ($x(t)$, $v(t)$) et celles qui sont angulaires ($\theta(t)$, $\omega(t)$) :

$$L = \theta \cdot R$$

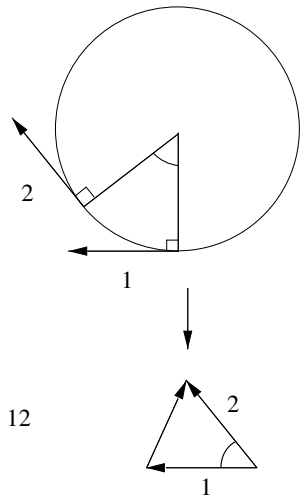
implique par dérivation :

$$\frac{dL}{dt} = v = \omega \cdot R = \frac{d\theta}{dt} \cdot R \;\Rightarrow\; v = \omega \cdot R$$

Relation importante

La complexité de la dynamique de ce mouvement tient dans son caractère bidimensionnel. En d'autres termes, il est nécessaire de tenir compte du caractère vectoriel de la vitesse (voir figure : 4.7)

Figure 4.7 – *Mouvement circulaire uniforme*



Ainsi, la rotation du vecteur vitesse "produit" un vecteur $\Delta\overrightarrow{v}$. Or, par définition de l'accélération :

$$\overrightarrow{a} = \frac{\Delta\overrightarrow{v}}{\Delta t}$$

si $\Delta\overrightarrow{v}$ est non nul, alors il y a accélération. Sur la figure on voit aussi que la direction de $\Delta\overrightarrow{v}$, comme celle de l'accélération $\overrightarrow{a}$, est radiale et plus précisément dans le sens du centre du cercle.

Le mouvement circulaire uniforme est donc particulier en ce sens que tout en se déroulant à vitesse (scalaire) constante, il se déroule avec une accélération non nulle, mais qui est perpendiculaire à la vitesse.

De plus, on montre que la valeur de l'accélération est :

$$\boxed{a = \frac{v^2}{R}} \tag{4.9}$$

où v est la vitesse scalaire et R le rayon du cercle.

En effet, selon la figure 4.7, on a :

$$\Delta x = \alpha \cdot R \text{ et } \Delta v = \alpha \cdot v$$

où Δx est la longueur de l'arc de cercle entre les deux instants où on considère la vitesse. Si Δt est le temps entre ces deux instants, on peut écrire :

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\alpha \cdot v}{\Delta t} = \frac{v}{R} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v}{R} \cdot v = \frac{v^2}{R}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Dynamique

Si on comprend que le MCU est un mouvement à vitesse constante, mais à accélération non nulle, on peut immédiatement saisir la présence d'une force. Celle-ci est naturellement dans la même direction et le même sens que l'accélération. En effet, cela découle de la seconde loi de Newton : $\overrightarrow{F} = m \cdot \overrightarrow{a}$ et du fait que la masse est toujours positive. Cette accélération, nommée centripète (et non centrifuge), est donc créée par une force (nommée aussi centripète) qui dévie l'objet de sa trajectoire rectiligne. Cela est parfaitement compatible avec la première loi de Newton, puisque la cause de la trajectoire circulaire est bien une force.

Virages inclinés

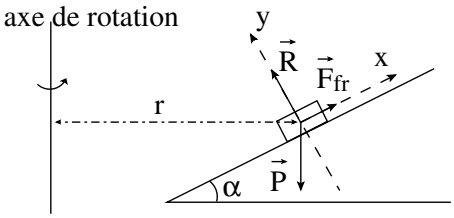
Le problème des virages relevés est intéressant, car il combine des problèmes de statique et de dynamique des plans inclinés avec des problèmes de forces de frottement. Il s'agit de déterminer la vitesse à laquelle une voiture peut passer un virage relevé faisant un angle α avec l'horizontale. Plusieurs cas sont à traiter :

Vitesses minimales Deux cas sont à considérer : celui où la pente du virage est assez faible pour que la force de frottement statique empêche le glissement vers le bas et celui où, sans vitesse, la voiture glisserait vers le bas malgré la force de frottement.

On note m la masse de la voiture et r le rayon du virage.

1. Vitesse minimale nulle.

Figure 4.8 – *Virages incliné : vitesse minimale*



La situation est celle décrite à la figure 4.8. On se trouve dans le cas d'une voiture sur une pente et qui ne glisse pas vers le bas. La vitesse minimale de la voiture est alors nulle. On peut augmenter la pente jusqu'à ce que la force de frottement statique ne compense plus la composante du poids parallèle au plan incliné. La composante parallèle au plan incliné est donnée par :

$$P_{//} = mg \cdot \sin(\alpha)$$

et la force de frottement statique maximale par :

$$F_{fr\,stat\,max} = \mu_s \cdot R$$

et ainsi, la somme des forces sur l'axe $x_{//}$ étant nulle, on a pour l'angle α' de l'imminence de glissement :

$$\mu_s \cdot R = mg \cdot \sin(\alpha')$$

or, la seconde loi de Newton sur l'axe $y_\perp$, donne :

$$R = mg \cdot \cos(\alpha')$$

Ainsi, on a :

$$\mu_s \cdot mg \cdot \cos(\alpha') = mg \cdot \sin(\alpha')$$

c'est-à-dire :

$$\tan(\alpha') = \mu_s$$

et finalement :

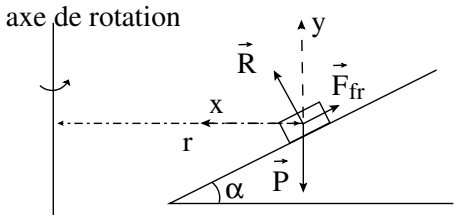
$$\alpha' = \arctan(\mu_s)$$

Ainsi, pour conclure, la vitesse minimale v_{min} pour passer un virage dont l'angle d'inclinaison α est tel que $\alpha \leq \arctan(\mu_s)$ est nulle.

$$v_{min} = 0 \text{ pour } \alpha \text{ tel que } \alpha \leq \arctan(\mu_s)$$

2. Vitesse minimale non nulle.

Figure 4.9 – *Virages incliné : vitesses minimale*



Si $\alpha > \arctan(\mu_s)$, il est nécessaire qu'il y ait une vitesse pour ne pas glisser. En effet, en décomposant la seconde loi de Newton sur les axes x et y de la figure 4.9, on a :
sur l'axe x :

$$R \cdot \sin(\alpha) - F_{fr\,stat\,max} \cos(\alpha) = m \cdot \frac{v_{min}^2}{r}$$

sur l'axe y :

$$R \cdot \cos(\alpha) + F_{fr\,stat\,max} \sin(\alpha) - mg = 0$$

et ainsi, avec $F_{fr\,stat\,max} = \mu_s \cdot R$, on a :

$$R \cdot (\sin(\alpha) - \mu_s \cdot \cos(\alpha)) = m \cdot \frac{v_{min}^2}{r}$$

et :

$$R \cdot (\cos(\alpha) + \mu_s \cdot \sin(\alpha)) = m \cdot g$$

et, en divisant les deux équations :

$$\frac{\sin(\alpha) - \mu_s \cdot \cos(\alpha)}{\cos(\alpha) + \mu_s \cdot \sin(\alpha)} = \frac{v_{min}^2}{R \cdot g}$$

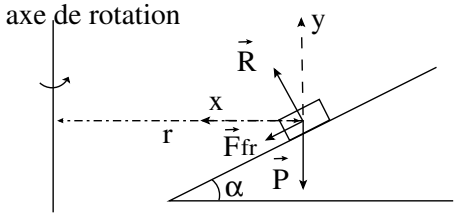
D'où finalement :

$$v_{min} = \sqrt{R \cdot g \cdot \frac{\tan(\alpha) - \mu_s}{1 + \mu_s \cdot \tan(\alpha)}}$$

Vitesses maximales Là encore deux cas se présentent. Le cas où la pente n'est pas assez grande pour maintenir la voiture sur sa trajectoire. Cela signifie que la compostant du poids parallèle au plan incliné n'est pas suffisante pour faire tourner la voiture. Il faut lui adjoindre la force de frottement. Or, comme cette dernière a un maximum, il existe une vitesse maximale pour laquelle on peut passer le virage. L'autre cas est celui ou la pense est suffisamment forte pour maintenir la voiture sur sa trajectoire même sans frottement. Cela signifie que la compostant du poids parallèle au plan incliné est suffisante pour faire tourner la voiture. On peut alors passer le virage même sur de la glace et la vitesse maximale est infinie.

1. Vitesse maximale finie.

Figure 4.10 – *Virages incliné : vitesse maximale*



Comme le montre la figure 4.10, la force de frottement est donc cette fois-ci vers le bas de la pente. Les équations de Newton deviennent : sur l'axe x :

$$R \cdot \sin(\alpha) + F_{fr\,stat\,max} \cos(\alpha) = m \cdot \frac{v_{max}^2}{r}$$

sur l'axe y :

$$R \cdot \cos(\alpha) - F_{fr\,stat\,max} \cdot \sin(\alpha) - mg = 0$$

et ainsi, avec $F_{fr\,stat\,max} = \mu_s \cdot R$, on a :

$$R \cdot (\sin(\alpha) + \mu_s \cdot \cos(\alpha)) = m \cdot \frac{v_{max}^2}{r}$$

et :

$$R \cdot (\cos(\alpha) - \mu_s \cdot \sin(\alpha)) = m \cdot g$$

et, en divisant les deux équations :

$$\frac{\sin(\alpha) + \mu_s \cdot \cos(\alpha)}{\cos(\alpha) - \mu_s \cdot \sin(\alpha)} = \frac{v_{max}^2}{R \cdot g}$$

D'où finalement :

$$v_{max} = \sqrt{R \cdot g \cdot \frac{\tan(\alpha) + \mu_s}{1 - \mu_s \cdot \tan(\alpha)}}$$

Il existe donc une vitesse maximale pour des angles inférieurs à un angle α'' déterminé au point suivant.

2. Vitesse maximale infinie. Cette vitesse maximale devient infinie pour des angles tels que le dénominateur de la fraction s'annule :

$$1 - \mu_s \cdot \tan(\alpha'') = 0$$

C'est-à-dire pour un angle α'' tel que :

$$\tan(\alpha'') = \frac{1}{\mu_s}$$

Ainsi, il n'existe pas de vitesse maximale pour des angles supérieurs ou égaux à α'' :

$$v_{max} = 0 \text{ pour } \alpha \text{ tel que } \alpha \geq \arctan(\frac{1}{\mu_s})$$

En résumé, on peut définir deux angles :

$$\alpha' = \arctan(\mu_s) \;\text{ et }\; \alpha'' = \arctan(\frac{1}{\mu_s})$$

et deux vitesses :

$$v_1 = \sqrt{R \cdot g \cdot \frac{\tan(\alpha) - \mu_s}{1 + \mu_s \cdot \tan(\alpha)}}$$

et :

$$v_2 = \sqrt{R \cdot g \cdot \frac{\tan(\alpha) + \mu_s}{1 - \mu_s \cdot \tan(\alpha)}}$$

La situation est alors la suivante :

1. pour un angle inférieur à α', pour passer le virage, il n'existe pas de vitesse minimale, mais une vitesse maximale :

$$v_{min} = 0 \;\text{ et }\; v_{max} = v_2$$

2. pour un angle supérieur à α', mais inférieur à α'', pour passer le virage, il existe une vitesse minimale et une vitesse maximale :

$$v_{min} = v_1 \;\text{ et }\; v_{max} = v_2$$

3. et pour un angle supérieur à α'', pour passer le virage, il existe une vitesse minimale, mais pas de vitesse maximale :

$$v_{min} = v_1 \;\text{ et }\; v_{max} = \infty$$

4.4.5 Satellite en orbite géostationnaire

Introduction

Un exemple intéressant de l'utilisation de la seconde loi de Newton, du mouvement circulaire uniforme et de la loi de la gravitation universelle, est donné par le calcul de l'altitude nécessaire pour qu'un satellite soit en orbite géostationnaire.

Théoriquement

On va donc utiliser les équations suivantes :

$F = m \cdot a$: seconde loi de Newton
$a = \frac{v^2}{R}$: mouvement circulaire uniforme
$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$: loi de la gravitation universelle

De ces trois lois, on tire :

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{(R_T + h)^2} = m_s \cdot \frac{v^2}{(R_T + h)}$$

où :
— G est la constante de la gravitation universelle,
— M_T est la masse de la terre,
— m_s est la masse du satellite,
— R_T est le rayon de la terre,
— h est l'altitude du satellite et
— v est la vitesse linéaire du satellite.

Avec, par définition de la vitesse, pour une trajectoire circulaire :

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R_T + h)}{T}$$

où : T est la période du mouvement, c'est à dire le temps que doit mettre le satellite pour faire un tour autour de la terre.

De là on tire (faites les calculs par vous même) :

$$h = (\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2})^{\frac{1}{3}} - R_T$$

Numériquement

Le calcul est simple :

$$h = (\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot (24 \cdot 3600)^2}{4 \cdot \pi^2})^{\frac{1}{3}} - 6,37 \cdot 10^6 = 35\ 857\,\text{km}$$

4.4.6 Mouvement central

Un mouvement central [b] est un mouvement dont l'accélération pointe toujours vers le même point. Il existe essentiellement deux types de mouvement centraux. Ceux dont l'accélération est inversement proportionnelle à la distance et ceux où elle est inversement proportionnelle à la distance au carré. Nous n'allons considérer ici que ces derniers qui sont en relation avec la loi de la gravitation universelle. On parle alors de mouvements kepleriens.

Mouvement kepleriens

On va donc considérer un mouvement dont l'accélération est une conséquence de la deuxième loi de Newton et de la loi de la gravitation universelle :

$$\overrightarrow{a} = G \cdot \frac{M}{r^3} \cdot \overrightarrow{r}$$

Pour un mouvement central keplerien, on montre :

1. que la trajectoire est dans un plan,
2. que le mouvement suit la loi des aires : le vecteur décrivant la position de l'objet balaye des aires égales pendant des temps égaux.
3. que la trajectoire est une conique dont le foyer correspond au point central,
4. que si la trajectoire est un ellipse dont le demi-grand axe vaut a, alors la période du mouvement est :

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{\kappa}}$$

ou κ est une constante du mouvement.

Loi de Kepler

Kepler énonça trois lois qui dérivent des précédentes et de la forme de l'accélération. Elles s'appliquaient aux planètes, mais on sait aujourd'hui qu'elles ont une portée plus importante, puisqu'elles peuvent aussi s'appliquer aux satellites par exemple. Elles s'énoncent de la manière suivante :

1. La trajectoire des planètes autour du soleil est une ellipse dont il occupe un des foyers.

b. Une bonne description des mouvements centraux se trouve dans : Gruber (1988) pp. 140-163. Notamment, s'y trouve une bonne analyse du mouvement des satellites.

2. Le vecteur dont l'origine est sur le soleil et qui décrit la position de la planète balaye des aires égales dans des temps égaux.
3. Le carré du rapport des périodes vaut le cube du rapport des grands axes.

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

Chapitre 5

Mécanique différentielle

5.1 Introduction

NEWTON, avec Leibnitz, est considéré comme l'un des deux premiers auteurs du calcul différentiel et intégral. La théorie physique qu'il a développée nécessitait en effet de nouveaux outils pour appréhender les relations entre position, vitesse et accélération. Nous allons développer dans ce chapitre cette approche particulière de la mécanique. Naturellement, elle nécessite des connaissances en mathématiques qui peuvent être assez avancées. Celles-ci seront supposées connues, car il est impossible d'en faire l'exposé dans ce cours.

5.2 Cinématique

Les rapports mathématiques entretenu entre la position, la vitesse et l'accélération ont été esquissés à travers les équations 4.2 et 4.4 qui sont rappelées ci-dessous :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{x}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{x}}{dt}} \tag{5.1}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{v}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}} \tag{5.2}$$

Mathématiquement, ces deux limites représentent des dérivées. Plus précisément, on peut dire que la vitesse est la dérivée de la position en fonction du temps et que l'accélération est la dérivée de la vitesse en fonction du temps. Dans les deux cas, la variable par rapport à laquelle on dérive est le temps.

C'est une des raison de la notation $\frac{d}{dt}$ qui précise que la dérivée se fait par rapport au temps. Une autre notation existe. On la dit de Newton. Mais elle ne fait que sous entendre la dérivation par rapport au temps : $\dot{x}$ et $\dot{v}$. Évidemment, si la vitesse est la dérivée de la position et que l'accélération est la dérivée de la vitesse, l'accélération est la seconde dérivée de la position par rapport au temps, ce qui s'exprime ainsi :

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \text{ et } a(t) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{5.3}$$

ou en notation de Newton :

$$v(t) = \dot{x} \text{ et } a(t) = \dot{v} \Rightarrow a(t) = \ddot{x} \tag{5.4}$$

D'autre part, autant on peut dériver pour passer de la position à l'accélération, autant on peut intégrer pour passer de l'accélération à la position. Le fait que l'intégration constitue l'opération inverse de la dérivée le justifie. Ainsi, on a :

$$v(t) = \int a(t)dt + v_o \text{ et } x(t) = \int v(t)dt + x_o \tag{5.5}$$

Ou v_o et x_o sont les constantes inévitables d'un intégration indéfinie et représentent la vitesse et la position initiales. Bien entendu, on peut intégrer deux fois l'accélération pour obtenir la position.
Il faut relever aussi la possibilité d'utiliser une intégrale définie :

$$v(t) = \int_{t_o}^{t} a(t)dt \text{ et } x(t) = \int_{t_o}^{t} v(t)dt \tag{5.6}$$

Le fait qu'on puisse calculer la position, respectivement la vitesse, en intégrant la vitesse, respectivement l'accélération, constitue une généralisation du problème du calcul de celui-ci par l'aire sous le graphe horaire de la vitesse, respectivement de l'accélération. En effet, calculer l'intégrale définie de la vitesse, respectivement de l'accélération, n'est en fin de compte que calculer l'aire sous leurs graphes horaires entre deux instants t et t_o donnés. Cela constitue une des propriétés mathématiques de l'intégrale. La généralisation tient au fait que l'horaire de la vitesse ou de l'accélération peut être n'importe quelle fonction, alors que précédemment, nous avions dû nous limiter aux fonctions simples telles que les fonctions constantes, linéaires et affines.

5.2.1 Exemples

Mouvement rectiligne uniformément accéléré : MRUA

Déterminons les équations de son mouvement. On a :

$$a(t) = a_o = constante$$

Ainsi, par intégration définie entre t_o et t :

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{t_o}^{t} a_o dt = a_0 \int_{t_o}^{t} dt = a_o \cdot t|_{t_o}^{t} = \\ &= a_o(t - t_o) = a_o t - a_o t_o = a_o t + v_o \end{aligned}$$

car, à $t = 0$, on a que $v(t) = v_o$, et par conséquent $-a_o t_o = v_o$.

Ainsi, on obtient bien :

$$v(t) = a_o \cdot t + v_o$$

Ce qui donne pour la position :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t_o}^{t} (a_o t + v_o) dt \\ &= a_o \int_{t_o}^{t} t \cdot dt + \int_{t_o}^{t} v_o \cdot dt = \\ &= \frac{1}{2} a_o t^2|_{t_o}^{t} + v_o t|_{t_o}^{t} = \\ &= \frac{1}{2} a_o (t^2 - t_o^2) + v_o(t - t_o) = \\ &= \frac{1}{2} a_o t^2 + v_o t - \frac{1}{2} a_o t_o^2 - v_o t_o = \\ &= \frac{1}{2} a_o t^2 + v_o t + x_o \end{aligned}$$

car, à $t = 0$, on a que $x(t) = x_0$, et par conséquent $-\frac{1}{2} a_o t_o^2 - v_o t_o = x_0$.

Ainsi, on obtient bien :

$$x(t) = \frac{1}{2} a_o t^2 + v_o t + x_o$$

Porté maximum en balistique

Si le calcul différentiel est intimement lié aux notions de position, vitesse et accélération, il existe des cas où son utilisation relève simplement d'un problème mathématique. Du point de vue de la physique, ces cas sont moins intéressants. Cependant, ils sont assez courant pour qu'on en donne ici un exemple simple.
Il s'agit de trouver sous quel angle on doit projeter un objet soumis exclusivement à son poids (mouvement balistique : voir paragraphes 2.5.4 et 4.4) pour que sa portée soit maximale.
Selon l'équation 4.8, on a :

$$x_P = \frac{v_o^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$$

Il s'agit ici de maximiser cette portée. Plus précisément de trouver l'angle α_{max} pour lequel celle-ci est maximale. La fonction est ainsi la portée x_P et la variable α. On doit donc dériver x_P en fonction de α et l'annuler :

$$\frac{d}{d\alpha} x_P(\alpha) = 0$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{dx_P}{d\alpha} &= \frac{v_o^2}{g} \cdot \frac{d}{d\alpha} \sin(2 \cdot \alpha) \\ &= \frac{v_o^2}{g} \cdot 2 \cdot \cos(2 \cdot \alpha) = 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\cos(2 \cdot \alpha) = 0$$

d'où finalement :

$$2 \cdot \alpha = \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pi/2 = 45^\circ$$

Bien évidemment ce résultat n'est valable que pour un mouvement balistique, pour lequel l'objet n'est soumis à aucun frottement.

5.3 Dynamique

Le rapport différentiel entre la position, la vitesse et l'accélération implique deux types de traitement mathématique de la seconde loi de Newton pour déterminer la vitesse ou la position d'un objet à partir de la connaissance des forces qui s'exercent sur lui.

Pour bien les comprendre, relevons tout d'abord encore une fois l'expression de la seconde loi de Newton. On a :

$$\sum F^{ext} = m \cdot a$$

Cela peut aussi s'écrire :

$$m \cdot a = \sum F^{ext}$$

ou, en raison des relations différentielles 5.4 entre la position, la vitesse et l'accélération :

$$\boxed{m \cdot \dot{v} = m \cdot \ddot{x} = \sum F^{ext}} \tag{5.7}$$

Manifestement, cette équation est différentielle. Si le membre de droite de l'équation ne dépend ni de la vitesse, ni de la position, sa résolution se fait simplement par intégration. Par contre, s'il dépend de l'une ou l'autre de ces deux grandeurs, on aura alors à traiter une équation différentielle.

5.3.1 Intégration

C'est le cas le plus simple. La partie gauche de l'équation 5.7 est une fonction explicite du temps. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} m \cdot \dot{v} = \sum F^{ext} \quad &\Rightarrow \\ v = \frac{1}{m} \cdot \int \sum F^{ext} dt \quad &\Rightarrow \\ x = \int v \cdot dt & \end{aligned}$$

Mais, pour mieux le comprendre, considérons des exemples simples.

Chute libre

Dans ce cas l'équation 5.7 s'écrit :

$$m \cdot \dot{v} = m \cdot g$$

D'où, par intégration :

$$v = \int g \cdot dt + c = g \cdot t + v_o$$

en raison des conditions initiales qui impliquent par exemple que :

$$v(t = 0) = v_o$$

Puis, on intègre un fois de plus :

$$x = \int (g \cdot t + v_o) \cdot dt + c' = \frac{1}{2} g t^2 + v_o t + x_o$$

toujours en raison des conditions initiales.

Freinage

On considère une voiture par exemple qui décélère sous l'effet de la force de frottement exercée par la route sur les pneus. On peut écrire :

$$m \cdot \dot{v} = -\mu_o \cdot mg$$

D'où, par intégration :

$$v = -\frac{1}{m} \int \mu_o \cdot mg \cdot dt + c = -\mu_o \cdot g \cdot t + v_o$$

et :

$$x = -\frac{1}{2} \mu_o g \cdot t^2 + v_o \cdot t + x_o$$

5.3.2 Équation différentielle

Le cas se complique si la partie gauche de l'équation 5.7 est une fonction de la vitesse ou de la position. Plusieurs cas sont à considérer selon le type de fonction. C'est pourquoi nous allons considérer les exemples suivants.

Chute dans un fluide visqueux

Il s'agit de la chute d'un objet de masse m sous l'effet de son poids et d'une force de frottement de type visqueux de la forme $F_{fr} = k \cdot v$. La situation est présentée à la figure 5.1.

La seconde loi de Newton, s'écrit selon l'axe de la figure 5.1 :

$$P - F_{fr} = m \cdot a$$

Avec une force de frottement dépendant linéairement de la vitesse, on a :

$$m \cdot g - k \cdot v = m \cdot a$$

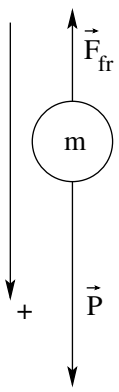


Figure 5.1 – *Chute visqueuse*

D'un point de vue différentiel, cette équation donne :

$$m \cdot g - k \cdot v = m \cdot \dot{v}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre linéaire en v. On peut l'écrire sous forme canonique :

$$\dot{v} + \frac{k}{m} \cdot v = g$$

La solution de cette équation différentielle est alors donnée par la somme de la solution générale de l'équation homogène (ou équation sans second membre) avec une solution particulière de l'équation complète (équation avec second membre).

1. Solution générale de l'équation homogène :

$$\dot{v} + \frac{k}{m} \cdot v = 0$$

Techniquement, pour trouver la solution de cette équation, il vaut mieux écrire :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} \cdot v = 0$$

Ainsi,on peut séparer les variables (v et t) de chaque côté de l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{k}{m} \cdot v \quad \Rightarrow \\ dv &= -\frac{k}{m} \cdot v \cdot dt \quad \Rightarrow \\ \frac{dv}{v} &= -\frac{k}{m} \cdot dt \end{aligned}$$

Et il ne reste alors plus qu'à intégrer des deux côtés de l'équation :

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{v} &= -\int \frac{k}{m} \cdot dt \quad \Rightarrow \\ \int \frac{1}{v} \cdot dv &= -\frac{k}{m} \int dt \quad \Rightarrow \\ \ln(v) &= -\frac{k}{m} \cdot t + C \quad \Rightarrow \\ e^{\ln(v)} &= e^{-\frac{k}{m} \cdot t + C} \quad \Rightarrow \\ v(t) &= e^{-\frac{k}{m} \cdot t} \cdot e^{C} \quad \Rightarrow \\ v(t) &= D \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} \end{aligned}$$

Où C et D sont des constantes.

2. Solution particulière de l'équation différentielle : Deux méthodes se proposent à nous : la variation des constantes ou un essai "inspiré". Nous verrons plus loin un exemple de la première méthode. Utilisons la seconde en tentant la solution particulière :

$$v(t) = A$$

On remplace donc cette solution, et sa dérivée $\dot{v} = 0$, dans l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \dot{v} + \frac{k}{m} \cdot v &= g \quad \Rightarrow \\ 0 + \frac{k}{m} \cdot A &= g \quad \Rightarrow \\ A &= \frac{m}{k} \cdot g \end{aligned}$$

Finalement, on construit la solution générale de l'équation différentielle par addition de la solution générale de l'équation homogène et de la solution particulière trouvée :

$$v(t) = D \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} + \frac{m}{k} \cdot g$$

Reste à déterminer la valeur de la constante D. Pour cela, utilisons les conditions initiales en imaginant qu'à $t = 0$ la vitesse $v = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} 0 &= D \cdot e^{0} + \frac{m}{k} \cdot g \quad \Rightarrow \\ D &= -\frac{m}{k} \cdot g \end{aligned}$$

Enfin, on peut écrire :

$$\begin{aligned} v(t) &= -\frac{m}{k} \cdot g \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} + \frac{m}{k} \cdot g \\ &= -\frac{m}{k} \cdot g \cdot (e^{-\frac{k}{m} \cdot t} - 1) \end{aligned}$$

On vérifie bien qu'à $t = 0$ la vitesse est nulle. On voit, par ailleurs, que pour $t \to \infty$, $e^{-\frac{k}{m} \cdot t} \to 0$ et la vitesse se stabilise à une valeur de

$$v = \frac{m}{k} \cdot g$$

À ce moment là, la force de frottement compense exactement le poids

$$F_{fr} = k \cdot v = k \cdot \frac{m}{k} \cdot g = m \cdot g$$

et la vitesse devient constante.

On peut ainsi représenter l'évolution de la vitesse en fonction du temps de la manière présentée sur la figure 5.2.

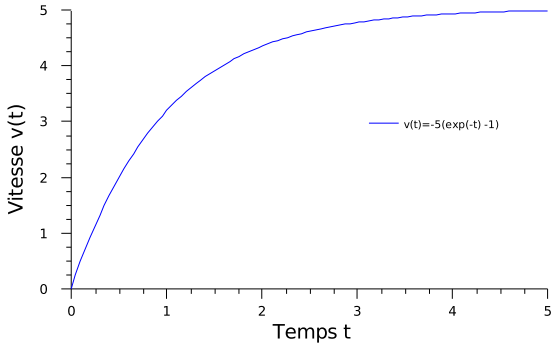
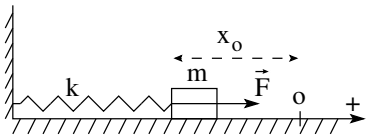


Figure 5.2 – *Chute dans un fluide visqueux*

Mouvement harmonique

Le mouvement que suit une masse oscillante attachée au bout d'un ressort est utile dans bien des cas, notamment en physique du solide. C'est un mouvement qui se déroule sur un seul axe. Il est pourtant complexe, car son analyse nécessite le calcul différentiel.
Considérons donc la figure 5.3.

Figure 5.3 – *Masse oscillante*



Considérons un ressort dont on marque la position détendue par o. On attache à l'extrémité de celui-ci une masse m et on comprime le ressort d'une distance x_0. Au départ sa vitesse est nulle. On le lâche alors en même temps qu'on enclenche le chronomètre.

L'équation du mouvement pour un tel système est unidimensionnelle. Elle s'écrit :

$$\sum F^{ext} = F = -k \cdot x = m \cdot a$$

avec un signe négatif pour la force car la situation de la figure 5.3 décrit une position négative de la masse. Ainsi, pour que la force soit positive, le signe négatif est nécessaire.

En raison de la dépendance de la force en fonction de la position, il s'agit d'une équation différentielle qu'on peut réécrire ainsi :

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0$$

Cette équation est linéaire du second ordre à coefficients constants. Elle n'a pas de second membre. On parle d'équation homogène. Sa solution passe donc uniquement par la solution de l'équation caractéristique suivante :

$$m \cdot r^2 + k = 0$$

qui se trouve être double et complexe :

$$r = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm\sqrt{i^2 \cdot \frac{k}{m}} = \pm i \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ainsi, la solution de l'équation différentielle se présente sous la forme :

$$x(t) = c_1 \cdot \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes à déterminer avec les conditions initiales. Pour cela, on peut poser :

$$x(t=0) = -x_o \;\; et \;\; v(t=0) = 0 \qquad (5.8)$$

À l'aide de la première relation 5.8, on a :

$$c_1 = -x_o$$

et en dérivant la position par rapport au temps pour obtenir la vitesse :

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{d}{dt}(c_1 \cdot \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t)) \\ &= -c_1 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t) \\ &+ c_2 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t) \end{aligned}$$

on peut aussi utiliser la seconde équation 5.8 :

$$c_2 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; c_2 = 0$$

Ainsi, on a pour solution finale :

$$x(t) = -x_o \cdot \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t) \qquad (5.9)$$

et pour la vitesse :

$$v(t) = x_o \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t) \qquad (5.10)$$

Maintenant que nous avons les équations du mouvement, nous pouvons nous intéresser à la vitesse maximale de la masse par exemple. Deux solutions s'offrent à nous :

— Par symétrie, la vitesse maximale doit être atteinte quand la masse passe par l'origine. On a donc cette vitesse v_{max} quand :

$$x(t_{max}) = 0$$

Ainsi, on peut écrire à l'aide de l'équation 5.9 :

$$\cos(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t_{max}) = 0$$

ce qui implique une première solution pour :

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t_{max} = \frac{\pi}{2} \tag{5.11}$$

soit un temps :

$$t_{max} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Ensuite, on peut calculer la vitesse maximale v_{max} à l'aide de l'équation 5.10 pour le temps t_{max} :

$$\begin{aligned} v(t_{max}) &= x_o \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t_{max}) \\ &= x_o \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \sin(\frac{\pi}{2}) \\ &= x_o \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned} \tag{5.12}$$

— Par annulation de la dérivée de l'équation 5.10, on peut aussi obtenir la vitesse maximale v_{max} :

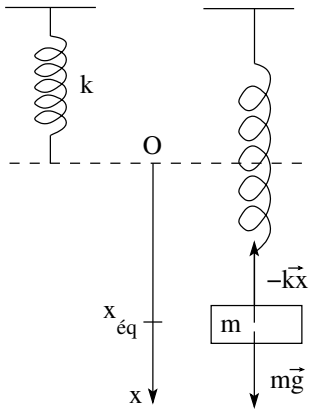
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x_o \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t_{max})) = 0 \ &\Rightarrow \\ \frac{d}{dt}(\sin(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t_{max})) = 0 \ &\Rightarrow \\ \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t_{max}) = 0 \ &\Rightarrow \\ \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t_{max} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Or cette condition est précisément celle obtenue en 5.11. La vitesse maximale est donc la même que celle en 5.12.

Mouvement harmonique d'une masse pendante

Parfois, l'équation différentielle du mouvement n'est pas homogène, c'est-à-dire qu'elle comporte un seconde membre. C'est le cas pour le système d'une masse oscillante suspendue à un ressort. Considérons donc la figure 5.5.

Figure 5.4 – *Masse suspendue*



La position d'équilibre, autour de laquelle la masse va osciller, est satisfaite par la condition d'équilibre statique :

$$-k \cdot x_{éq} + m \cdot g = 0$$

qui nous donne une position :

$$x_{éq} = \frac{m \cdot g}{k}$$

En considérant maintenant la figure 5.5

on peut définir une nouvelle coordonnée x' qui va nous permettre d'obtenir une solution oscillant autour de la position d'équilibre. On peut donc naturellement poser :

$$x = x' + x_{éq} = x' + \frac{m \cdot g}{k}$$

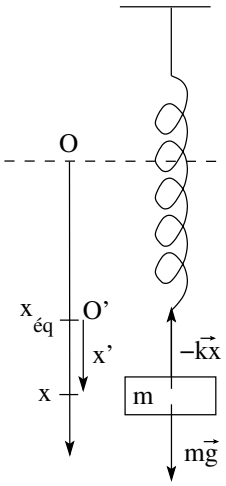
L'équation du mouvement devient alors :

$$mg - kx = mg - k(x' + \frac{m \cdot g}{k}) = m \cdot a$$

C'est une équation différentielle, à cœfficients constants, du second degré. Elle peut s'écrire, en terme de position :

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x + \frac{m \cdot g}{k} - m \cdot g = 0$$

Figure 5.5 – *Masse oscillante suspendue*



ou, sous forme canonique :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x + \frac{1-k}{k} \cdot g = 0 \qquad (5.13)$$

Mouvement non linéaire

Le dernier type de mouvement auquel nous allons nous intéresser est celui d'une masse soumise à une force de frottement non-linéaire : $F_{fr} = -k \cdot v^2$. C'est typiquement le type de force de frottement qui apparaît quand un objet tombe à grande vitesse dans l'air. Imaginons donc une masse m soumise à son poids et à une telle force de frottement. La seconde loi de Newton peut s'écrire, selon un axe orienté dans le même sens que le poids :

$$m \cdot g - k \cdot v^2 = m \cdot a$$

ou sous forme différentielle :

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x}^2 - m \cdot g = 0 \qquad (5.14)$$

Cette équation est du second degré et non linéaire en raison de la présence de $\dot{x}^2$. Elle ne possède aucune solution analytique et il faut utiliser l'ordinateur pour la résoudre.

Cependant, pendant la chute, la force de frottement augmente progressivement jusqu'à compenser le poids. Alors la vitesse de l'objet devient constante. On la nomme vitesse limite de chute et on peut la calculer. En effet, si $v = const$, alors $a = 0$ et $\ddot{x} = 0$. L'équation 5.14 devient alors :

$$k \cdot \dot{x}^2 = m \cdot g \Rightarrow k \cdot \dot{x}^2 = \frac{m \cdot g}{k}$$

soit finalement :

$$v = \dot{x} = \sqrt{\frac{m \cdot g}{k}}$$

Chapitre 6

Quantité de mouvement

6.1 Introduction

Il existe une classe de problèmes qui font intervenir des forces variant très rapidement et d'une grande intensité. Il s'agit des problèmes de chocs. Il existe une grandeur, la *quantité de mouvement*, dont l'évolution permet d'étudier simplement ces problèmes. De plus, elle nous permet d'obtenir des renseignements sur la dynamique du choc et notamment sur la force moyenne qui agit pendant celui-ci (voir paragraphe 11.3.1).

6.2 Quantité de mouvement

Le problème est le suivant : deux billes de masse différentes m_1 et m_2 entrent en collision frontale avec des vitesse respectives v_1 et v_2. On peut donc écrire, à l'aide de la troisième loi de Newton :

$$F_{1\to 2} = F_{2\to 1} \tag{6.1}$$

où les forces $F_{1\to 2}$ et $F_{2\to 1}$ sont celles qui s'exercent au moment du choc.

D'autre part, si on prend pour système celui composé de chaque bille individuellement, On peut écrire pour m_2, au moment du choc :

$$\sum F^{ext} = m_2 \cdot a_2 \;\; soit \;\; F_{1\to 2} = m_2 \cdot a_2 \tag{6.2}$$

et pour m_1 :

$$\sum F^{ext} = m_1 \cdot a_1 \;\; soit \;\; F_{2\to 1} = m_1 \cdot a_1 \tag{6.3}$$

En combinant les équations 6.1, 6.2 et 6.3, on a alors :

$$m_2 \cdot a_2 = m_1 \cdot a_1 \tag{6.4}$$

Or, pour ne pas devoir parler de dérivée[a], on peut comprendre l'équation 6.4 comme comprenant des accélérations moyennes et écrire :

$$\begin{aligned} m_2 \cdot \frac{\Delta v_2}{\Delta t} = m_1 \cdot \frac{\Delta v_1}{\Delta t} \;\; &\Rightarrow \\ m_2 \cdot \Delta v_2 - m_1 \cdot \Delta v_1 &= 0 \\ p_2 - p_1 = \Delta p &= 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

en définissant la grandeur p, appelée *quantité de mouvement* par :

$$\boxed{p = m \cdot v} \tag{6.6}$$

L'équation 6.5 signifie que la variation de la quantité de mouvement est nulle pendant le choc. La quantité de mouvement est donc une constante ou en d'autres termes elle est conservée pendant les chocs :

$$\boxed{p = constante} \tag{6.7}$$

La conservation de la quantité de mouvement est une loi de conservation très générale. Elle ne s'applique pas seulement aux chocs.

6.2.1 Masse d'inertie

Il faut remarquer le rôle joué par la quantité de mouvement dans la définition de la masse d'inertie. ... voir matière Balibar

a. On verra au paragraphe 5.2, que l'accélération n'est autre que la dérivée de la vitesse : $a = \frac{dv}{dt}$

6.3 Énergie cinétique

Si on lâche une boule de « pâte à modeler » à une certaine hauteur du sol, on constate qu'en le percutant elle se colle à lui. Une boule de « pâte à modeler » ne rebondit pas. On qualifie le choc avec le sol de « *parfaitement mou* ». Si le sol ne bouge pas, c'est-à-dire ne recule pas, toute l'énergie cinétique juste avant le choc, qui vient de l'énergie potentielle initiale, est absorbée par la déformation de la « pâte à modeler ». Par contre, si l'objet heurté par la « pâte à modeler » acquiert avec elle une certaine vitesse, une partie de l'énergie cinétique initiale se retrouve dans l'énergie cinétique de l'ensemble après le choc et une autre partie se retrouve dans la déformation de la « pâte à modeler ».

Par contre, une balle superélastique va rebondir, voir même remonter jusqu'à la même hauteur qu'au départ. Si c'est le cas, on qualifiera le choc de « *parfaitement élastique* ». Si non, il sera dit « *partiellement élastique* ». Deux corps se heurtant de manière parfaitement élastique ont donc une énergie cinétique totale qui est conservée au contraire du cas d'un choc partiellement élastique entre les deux corps.

6.4 Choc parfaitement élastique

Dans le cas d'un choc parfaitement élastique unidimensionnel entre deux particules la quantité de mouvement et l'énergie cinétique sont conservées. Les équations se présentent donc de la manière suivante :

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \tag{6.8}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2'^2 \tag{6.9}$$

où les exposants $'$ signifient « après le choc ». L'équation 6.9 présente un degré de complexité plus important que l'équation 6.8 en raison des carrés des vitesses. On peut résoudre ce système d'équations pour trouver les vitesses après le choc en passant par la résolution d'un équation du second degré. Mais, on peut aussi trouver de manière générale un équation plus simple que celle de la conservation de l'énergie cinétique. Pour cela, réécrivons les équations 6.8 et 6.9 avec les masses m_1 et m_2 de chaque côté des égalités :

$$m_1 \cdot (v_1 - v_1') = m_2 \cdot (v_2' - v_2) \tag{6.10}$$

$$m_1 \cdot (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 \cdot (v_2'^2 - v_2^2) \tag{6.11}$$

Puis, a l'aide de l'identité remarquable :

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

réécrivons l'équation 6.11 sous la forme :

$$m_1 \cdot (v_1 - v_1') \cdot (v_1 + v_1') = m_2 \cdot (v_2' - v_2) \cdot (v_2' + v_2) \tag{6.12}$$

L'équation 6.10 permet alors de supprimer la partie gauche de chaque membre de l'équation 6.12 pour obtenir :

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2$$

Soit en réarrangeant les termes :

$$v_1 - v_2 = -(v_1' - v_2') \tag{6.13}$$

Cette équation signifie que lors d'un choc frontal, unidimensionnel et élastique de deux particules, les vitesses changent de signe et leur grandeurs sont échangées.

Ainsi, plutôt que d'utiliser les équations 6.8 et 6.9, dont la seconde présente des vitesses quadratiques, on peut utiliser à la place les équations 6.8 et 6.13. Ce dernier système d'équations étant plus simple que le premier.

6.4.1 Exemple

Considérons un exemple simple. Tout se déroule sur un seul axe. Deux particules de même masse se percutent frontalement, l'une ayant une vitesse de 7 m/s et l'autre une vitesse double de la première. Quelles sont les vitesses des particules après le choc ?

Posons $v_1 = 7\,\mathrm{m/s}$ pour la vitesse de la particule de masse m_1 et $v_2 = -14\,\mathrm{m/s}$ pour la vitesse de la particule de masse m_2. Le signe négatif de la masse m_2 vient du choix de l'axe qui est orienté dans le sens de v_1. On a aussi que $m_1 = m_2 = m$.

Ainsi, on peut écrire la conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \\ m \cdot 7 + m \cdot (-14) &= m \cdot v_1' + m \cdot v_2' \\ 7 - 14 &= v_1' + v_2' \\ v_1' + v_2' &= -7 \end{aligned} \tag{6.14}$$

On peut aussi écrire l'équation de la conservation de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot m \cdot 7^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (-14)^2 &= \\ \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2'^2 & \\ 49 + 196 = v_1'^2 + v_2'^2 & \\ v_1'^2 + v_2'^2 = 245 & \end{aligned} \tag{6.15}$$

On tire alors de l'équation 6.14 :

$$v_1' = -7 - v_2' \tag{6.16}$$

qu'on remplace dans l'équation 6.15 :

$$\begin{aligned} (-7 - v_2')^2 + v_2'^2 &= 245 \\ 49 + 2 \cdot 7 \cdot v_2' + v_2'^2 + v_2'^2 &= 245 \\ 2 \cdot v_2'^2 + 14 \cdot v_2' - 196 &= 0 \\ v_2'^2 + 7 \cdot v_2' - 98 &= 0 \end{aligned}$$

Soit une équation du second degré dont la solution est :

$$\begin{aligned} v_2' &= \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot (-98)}}{2} \\ &= \frac{-7 \pm 21}{2} = \begin{cases} 7\,\mathrm{m/s} \\ -14\,\mathrm{m/s} \end{cases} \end{aligned}$$

Évidemment, la seconde solution $v_2' = -14\,\mathrm{m/s}$ n'est pas possible puisque après le choc la particule poursuivrait son mouvement à la même vitesse qu'avant. Donc :

$$v_2' = 7\,\mathrm{m/s}$$

et, selon l'équation 6.16, on a :

$$v_1' = -7 - 7 = -14\,\mathrm{m/s}$$

On constate donc que pour les grandeurs il y a échange des vitesses et que les signes des vitesses après le choc sont opposé à ceux des vitesses avant.

Cet exemple est relativement compliqué car on a utilisé l'équation de la conservation de l'énergie cinétique qui mène à des vitesses quadratiques.

On peut cependant trouver la solution plus simplement en utilisant l'équation 6.13 démontrée précédemment. On a alors :

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 &= -(v_1' - v_2') \Rightarrow \\ 7 - (-14) &= -(v_1' - v_2') \\ v_1' - v_2' &= -21 \end{aligned}$$

Avec l'équation 6.16 obtenue de la conservation de la quantité de mouvement, on a alors :

$$\begin{aligned} v_1' - v_2' &= -21 \Rightarrow \\ (-7 - v_2') - v_2' &= -21 \\ -7 - 2 \cdot v_2' &= -21 \\ 2 \cdot v_2' &= 14 \\ v_2' &= 7\,m/s \end{aligned}$$

Et, comme précédemment, $v_1' = -14\,\mathrm{m/s}$. On retrouve donc bien plus simplement la solution en se passant de l'équation de conservation de l'énergie cinétique. Évidemment, celle-ci a déjà été utilisée pour obtenir l'équation 6.13.

6.5 Choc parfaitement mou

Pour un choc parfaitement mou, la vitesse finale des deux masses est la même : elles restent "collées" ensemble. Dans ce cas, l'énergie cinétique initiale des deux corps se retrouve après le choc pour une partie dans l'énergie cinétique des deux corps attachée et pour l'autre dans le travail de déformation des corps.

6.5.1 Exemple

Comme exemple de choc parfaitement mou, considérons encore deux particules de même masse qui se percutent frontalement, l'une ayant une vitesse $v_1 = 7\,\mathrm{m/s}$ et l'autre une vitesse double de la première. Mais cette fois-ci les deux particules restent collées ensemble après le choc. Quelle est la fraction d'énergie cinétique « perdue » dans la collision ?

La conservation de la quantité de mouvement nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} m \cdot v_1 + m \cdot v_2 &= (m+m) \cdot v' \\ v_1 + v_2 &= 2 \cdot v' \\ v' &= \frac{7-14}{2} = -3,5\, m/s \end{aligned}$$

Évidemment pour un tel choc mou, il n'y a pas conservation de l'énergie cinétique. On a, avec le résultat précédent :

$$\begin{aligned} E_{cin\,avant} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot 7^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (-14)^2 \\ &= 24,5 \cdot m + 98 \cdot m = 122,5 \cdot m \\ E_{cin\,après} &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m \cdot (-3,5)^2 \\ &= 12,25 \cdot m \end{aligned}$$

Ainsi, l'énergie cinétique perdue est :

$$\Delta E_{cin} = 122,5 \cdot m - 12,25 \cdot m = 110,25 \cdot m$$

et la fraction de l'énergie cinétique initiale perdue dans le choc est :

$$p = \frac{110,25 \cdot m}{122,5 \cdot m} = 0,90 = 90\%$$

6.6 choc bidimentionnel

L'équation de conservation de la quantité de mouvement qui dérive de la seconde loi de Newton est en réalité vectorielle. Tout le développement qui mène à elle en partant de la seconde loi de Newton utilise des grandeurs vectorielles comme l'accélération et la vitesse. Ainsi, la conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{p} = constante} \qquad (6.17)$$

6.6.1 Exemple

— Considérons le cas d'un choc mou de deux particules identiques se déplaçant perpendiculairement à la même vitesse v avant le choc. Choisissons un système d'axes orthogonaux pour que, avant le choc, les deux particules aient chacune une vitesse parallèle à l'un des axes et notons $\overrightarrow{v'}$ la vitesse des deux particules assemblées après le choc. On peut écrire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} &= \overrightarrow{p}'_1 + \overrightarrow{p}'_2 \\ m \cdot \overrightarrow{v}_1 + m \cdot \overrightarrow{v}_2 &= (m+m) \cdot \overrightarrow{v}' \\ \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 &= 2 \cdot \overrightarrow{v}' \end{aligned}$$

Soit, pour une même vitesse initiale des deux particules, en projetant sur les axes :

$$\begin{aligned} &\text{Sur x :} \quad v + 0 = 2 \cdot V_x \;\Rightarrow v'_x = v/2 \\ &\text{Sur y :} \quad 0 + v = 2 \cdot V_y \;\Rightarrow v'_y = v/2 \end{aligned}$$

La vitesse de l'ensemble des deux masse est donc de :

$$v' = \sqrt{(v/2)^2 + (v/2)^2} = \sqrt{2 \cdot v^2/4} = v/\sqrt{2}$$

et bien évidemment l'angle sous lequel les deux particules partent vaut 45°, puisqu'on a :

$$\tan(\alpha) = \frac{v/2}{v/2} = 1$$

Qu'en est-il de la conservation de l'énergie cinétique ? On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m \cdot v'^2 \\ 2 \cdot v^2 = 2 \cdot v'^2 \;&\Rightarrow v = v' \end{aligned}$$

Ce qui montre simplement que lors d'un choc mou, il n'y a pas conservation de l'énergie cinétique.

On remarquera que le choc considéré ici se fait dans l'axe du centre de gravité de chaque particule. On parle de choc frontal.

— Considérons maintenant le cas d'un choc frontal élastique de deux particules de même masse et de même vitesse initiale v perpendiculaire l'une à l'autre. Choisissons chacune de ces deux vitesses parallèle à l'un des axes orthogonaux de notre système d'axes et notons v' les vitesses après le choc.
Les équations de conservation de la quantité de mouvement s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} &\text{Sur x :} \quad m \cdot v_1 = m \cdot v'_{1\,x} + m \cdot v'_{2\,y} \\ &\text{Sur y :} \quad m \cdot v_2 = m \cdot v'_{1\,y} + m \cdot v'_{2\,y} \end{aligned}$$

On a ici quatre inconnues : $v'_{1\,x\,y}$ et $v'_{2\,x\,y}$, mais seulement deux équations.
Comme seule la conservation de l'énergie peut nous venir en aide, on a un système de quatre inconnues à trois équations. Il s'agit d'un système indéterminé.
Cela peut paraître surprenant, car on peut penser alors à une faille dans le déterminisme classique caractéristique de la mécanique newtonienne. Ce n'est évidemment pas le cas. En effet, on sent bien qu'il manque à la dynamique du choc un paramètre. Celui-ci se nomme paramètre d'impact et traduit la spécificité d'un choc non frontal entre deux objets de dimensions non nulles. Dans ce cadre, il est nécessaire de considérer que les objets vont se mettre à tourner sur eux-même et impliquer un principe issu de la dynamique des objets en rotation, celui de conservation du moment cinétique[39].
Malheureusement, nous ne pouvons aborder ce principe ici. La dynamique générale des chocs restera donc ici inaccessible. Nous ne considérerons donc que quelques cas particuliers.

— On montre par exemple que si l'une des masses à une vitesse nulle, après le choc sa direction est parallèle à la ligne qui lie les deux centres de gravité lors de l'impact, nommée *ligne d'impact*.

Par ailleurs, si les masses des deux corps sont identiques, on peut écrire les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie comme :

$$m \cdot \overrightarrow{v}_1 = m \cdot \overrightarrow{v}'_1 + m \cdot \overrightarrow{v}'_2$$
$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v'^2_1 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v'^2_2$$

Soit plus simplement :

$$\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{v}'_1 + \overrightarrow{v}'_2$$
$$v_1^2 = v'^2_1 + v'^2_2$$

ou en élevant l'équation de conservation de la quantité de mouvement au carré :

$$v_1^2 = v'^2_1 + v'^2_2 + 2 \cdot \overrightarrow{v}'_1 \cdot \overrightarrow{v}'_1$$
$$v_1^2 = v'^2_1 + v'^2_2$$

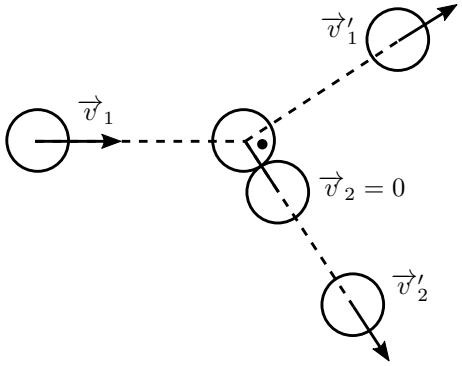
En comparant les deux équations, on en tire que :

$$\overrightarrow{v}'_1 \cdot \overrightarrow{v}'_2 = 0 \qquad (6.18)$$

En d'autre termes, les vitesses après le choc sont perpendiculaires.

En résumé, pour un choc de deux objets de masse identique dont l'une est initialement au repos, la direction de la vitesse de cette dernière après le choc est celle de la ligne d'impact et la direction de la vitesse de l'objet initialement en mouvement lui est perpendiculaire. La figure 6.1 présente la situation.

Figure 6.1 – *Collision 2 dim. de masses identiques*



6.7 Impulsion

Chapitre 7

L'énergie

7.1 Introduction

A L'ORIGINE, la notion d'énergie est apparue comme une seconde voie dans l'étude de la dynamique des mouvements. En effet, la théorie de Newton, qui se situe au niveau de la relation causale entre force et accélération, utilise des grandeurs qui sont en permanente évolution au cours du temps ($F(t)$, $a(t)$, $v(t)$ et $x(t)$). De plus, elle se place au niveau mathématique de l'accélération. Pour remonter à la vitesse ou à la position, il faut ensuite effectuer une série d'opérations mathématiques qui peuvent ne pas être simples (intégrations). Est donc apparue une nouvelle théorie utilisant des concepts se situant au niveau mathématique de la vitesse et développant des théorèmes de conservation. Ainsi, cette seconde voie s'est vite présentée comme un complément à la théorie de Newton permettant des solutions mathématiques parfois plus simples que celles de la théorie newtonienne aux problèmes de mécanique. Mais elle a aussi permis de mettre en évidence la conservation de certaines grandeurs importantes.

D'un autre côté, les nouveaux concepts développés ont pris, avec le développement des appareils nécessitant des sources d'énergie, une véritable signification dans la vie courante. Et les problèmes énergétiques de ce début de XXI^{e} siècle contribuent plus encore aujourd'hui à imposer la nécessité de comprendre les notions de travail, d'énergie et de puissance.

Ce chapitre va donc tenter de formuler aussi simplement que possible tous ces concepts, afin de permettre de mieux comprendre les enjeux des problèmes énergétiques d'aujourd'hui.

7.2 Travail

La première notion importante à connaître est celle liée à l'action d'une force sur une distance donnée. On imagine bien qu'un cheval tirant une péniche (voir figure 7.1) doit effectuer un certain travail. Évidemment, plus la force qu'il doit exercer pour compenser la force de frottement et faire avancer le traîneau est importante, plus le travail qui lui est demandé le sera. Par ailleurs aussi, plus la distance qu'il va parcourir sera grande plus son travail le sera. On peut ainsi assez simplement définir le travail par :

$$\boxed{A = F \cdot d} \tag{7.1}$$

où A est le travail (« Arbeit » en allemand), F la force exercée et d la distance parcourue. Le travail s'exprime en Joule (J), unité définie par :

$$[A] = [F] \cdot [d] = \mathrm{N\,m} = \mathrm{J}$$

On peut ainsi calculer le travail nécessaire pour faire avancer un objet horizontalement avec une force de 4 N sur une distance de 5 m :

$$A = F \cdot d = 4 \cdot 5 = 20\,\mathrm{J}$$

Deux autres unité de travail (et d'énergie) très connues (mais non SI) sont la calorie (cal) et le kilowattheure (kWh). On a :

$$1\,\mathrm{cal} = 4{,}186\,\mathrm{J} \text{ et } 1\,\mathrm{kWh} = 3{,}6 \cdot 10^{6}\,\mathrm{J}$$

Figure 7.1 – *Puissance*
Le cheval vapeur[40]

Attention, la présence du symbole W pour Watt ne signifie pas qu'il s'agit d'une puissance, comme nous le verrons au paragraphe 7.3

Remarquons finalement que la définition du travail donnée ci-dessus n'est valable que pour des forces s'exerçant dans la même direction et le même sens que le déplacement. Pour une force agissant dans le sens contraire du déplacement, le travail est négatif et pour une force perpendiculaire au déplacement, il est nul. Cela se traduit aisément en considérant comme définition du travail le produit scalaire entre deux vecteurs : la force et le déplacement.

7.3 Puissance

On voit que le travail ne dépend pas du temps. Or, on peut produire un même travail lentement (voir figure 7.1) ou rapidement. La manière dont ce travail est produit dans le temps donne lieu à la définition de la notion de puissance. Plus le temps mis pour produire un travail donné est court, plus il faudra de la puissance. On doit donc écrire :

$$\boxed{P = \frac{A}{t}} \tag{7.2}$$

où P est la puissance, A le travail et t le temps mis pour le produire. L'unité de la puissance est le Watt (W), défini par :

$$[P] = \frac{[A]}{[t]} = \frac{J}{s} = \mathrm{W}$$

On peut ainsi calculer la puissance nécessaire pour produire un travail de 20 J en une minute :

$$P = \frac{A}{t} = \frac{20}{60} = 0{,}33\,\mathrm{W}$$

Une autre unité de puissance (non SI) est le cheval-vapeur (Ch ou CV). On a :

$$1\,\mathrm{Ch} = 736\,\mathrm{W}$$

Il faut remarquer que le fait qu'on puisse aussi écrire l'équation 7.2 sous la forme :

$$A = P \cdot t$$

a permis de définir le kilowattheure (kWh) en tant qu'unité du travail (ou d'énergie). En effet, en choisissant le kWh pour unité de puissance et l'heure pour unité de temps, on a :

$$[A] = [P] \cdot [t] = \mathrm{kWh}$$

7.4 Énergie potentielle

Le poids d'un objet de masse m tombant d'une hauteur h produit un travail qu'on peut calculer ainsi :

$$A = F \cdot d = P \cdot h = mg \cdot h$$

Partant de ce résultat, on "localise" ce travail dans l'objet situé à la hauteur h. En d'autres termes, on s'imagine que cet objet dispose, de par sa situation à la hauteur h, d'une "énergie potentielle". En tombant sous l'effet de son poids, l'objet transformerait alors celle-ci en travail. Comme celui-ci vaut $mg \cdot h$, on peut définir l'énergie potentielle par :

$$\boxed{E_{pot} = mg \cdot h} \tag{7.3}$$

La transformation possible de l'énergie potentielle en travail implique une correspondance des unités de ces deux grandeurs. Ainsi :

$$[E_{pot}] = [A] = \mathrm{J}$$

On peut ainsi résumer la situation en disant que pour monter à une hauteur h un objet de masse m

soumis à son poids, on doit fournir un travail sous la forme d'une force opposée et égale à son poids qui se déplace sur une hauteur h. Au fur et à mesure de l'élévation, le travail fourni se transforme en énergie potentielle. Ce travail est récupérable à travers le travail fourni par le poids de l'objet quand on le redescend à sa hauteur initiale.

7.5 Énergie cinétique

Un camion s'écrasant contre un mur à une vitesse de 50 km/h va produire un travail de déformation de celui-ci. Sa masse et son mouvement constituent donc une sorte de réservoir d'énergie que nous appellerons « énergie cinétique ». Pour la calculer précisément, on procède comme pour l'énergie potentielle. On calcule le travail nécessaire pour amener le camion à la vitesse choisie et on considère que ce travail constitue l'énergie cinétique du camion. Dans le cas d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré, avec une vitesse initiale nulle, on a :

$$v^2 = v_o^2 + 2 \cdot a \cdot d \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2 - 0^2}{2 \cdot d}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} A &= F \cdot d = ma \cdot d \\ &= m \cdot \frac{v^2}{2 \cdot d} \cdot d \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \end{aligned}$$

On montre que ce résultat n'est pas valable seulement dans les conditions ci-dessus, mais est tout-à-fait général. Ainsi, l'énergie cinétique d'un objet de masse m et de vitesse v est donnée par :

$$\boxed{E_{cin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2} \tag{7.4}$$

A nouveau, la transformation possible de l'énergie cinétique en travail implique une identité des unités de ces deux grandeurs et :

$$[E_{cin}] = [A] = \text{J}$$

On peut aussi résumer la situation en disant que pour augmenter la vitesse d'un objet de masse m du repos à une vitesse donnée, on doit fournir un travail qui s'accumule sous la forme d'énergie cinétique dans l'objet. Ce travail est récupérable à travers le travail fourni lorsque l'objet exerce une force qui diminue sa vitesse.

7.6 Théorème de l'énergie cinétique

La remarque de la fin du paragraphe 7.5 nous amène à considérer la variation d'énergie cinétique à travers le travail qui la produit ou qu'elle produit. Cela constitue le théorème de l'énergie cinétique qui s'exprime ainsi :

$$\boxed{\Delta E_{cin} = \sum A_{F^{ext}}} \tag{7.5}$$

Il faut bien comprendre que le travail à prendre en compte dans ce théorème est celui de toutes les forces extérieures en jeu. Il peut s'agir de forces qui dissipent de l'énergie, dites dissipatives, comme la force de frottement, ou de forces qui la conservent, dites conservatives, comme le poids par exemple.

Nous verrons au paragraphe 7.7 que le théorème de conservation de l'énergie mécanique ne traite quant à lui que des cas où les forces sont conservatives. Il n'est apparemment valable qu'en l'absence de frottement. La résolution des problèmes ne contenant que de telles forces s'en trouve facilitée. Cela peut néanmoins apparaître comme une limitation. Elle n'est pourtant qu'apparente. Au niveau fondamental, les forces de frottement s'avèrent en réalité être des forces électriques qui sont conservatives. Le théorème de conservation de l'énergie mécanique est donc tout aussi général que celui de conservation de l'énergie cinétique.

Il existe cependant une autre façon de prendre en compte les forces de frottement au sein d'un théorème analogue à celui de conservation de l'énergie mécanique. Au paragraphe 7.8 nous montrerons qu'il suffit pour cela de considérer la variation de l'énergie mécanique comme équivalente au travail des seules forces non conservatives (forces de frottement).

7.7 Conservation de l'énergie mécanique

Qu'elle soit potentielle ou cinétique, il s'agit toujours d'énergie. On comprend donc facilement qu'il puisse exister des transferts entre ces deux formes d'énergie (comme avec d'autre formes d'énergie que nous verrons par la suite d'ailleurs !).

Le cas de la chute d'un objet permet de bien illustrer la situation. Un objet immobile à une hauteur

Figure 7.2 – *Énergie cinétique et potentielle*
L'énergie se transforme[41]

h a une énergie potentielle donnée par :

$$E_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

et une énergie cinétique nulle en raison de son immobilité :

$$E_{cin} = 0$$

Si on le lâche, sous l'effet de son poids, il va tomber. La hauteur à laquelle il se situe va donc diminuer et, avec elle, son énergie potentielle :

$$h \searrow \Rightarrow \quad E_{pot} = m \cdot g \cdot h \searrow$$

Bien entendu, cette diminution d'énergie potentielle se fait au profit d'un autre type d'énergie : l'énergie cinétique. En effet, la vitesse de l'objet, et donc son énergie cinétique, augmente en tombant :

$$v \nearrow \Rightarrow \quad E_{cin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \nearrow$$

Arrivé à une hauteur nulle, l'objet n'a plus que de l'énergie cinétique :

$$h = 0 \Rightarrow \; E_{pot} = 0 \; ; \; E_{cin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Dans le cas où il n'y a pas de frottements, on peut considérer que toute l'énergie potentielle s'est transformée en énergie cinétique. Il y a donc là une *conservation de l'énergie* qui passe d'une forme potentielle à une autre forme cinétique. On peut donc écrire :

$$E_{pot} = mg \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = E_{cin}$$

et déterminer ainsi la vitesse à laquelle l'objet arrive en bas :

$$mg \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow$$
$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Pour formaliser ce *principe de conservation de l'énergie*, on définit une nouvelle grandeur appelée *énergie mécanique* E_{mec} par :

$$\boxed{E_{mec} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + mg \cdot h} \qquad (7.6)$$

qui permet d'écrire le théorème de conservation de l'énergie suivant :

$$\boxed{E_{mec} = const} \qquad (7.7)$$

Ce qui signifie aussi :

$$\begin{aligned} E_{mec\,2} &= E_{mec\,1} \Rightarrow \\ E_{mec\,2} - E_{mec\,1} &= 0 \\ \Delta E_{mec} &= 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} E_{cin\,2} + E_{pot\,2} - (E_{cin\,1} + E_{pot\,1}) &= 0 \\ E_{cin\,2} - E_{cin\,1} + E_{pot\,2} - E_{pot\,1} &= 0 \\ \Delta E_{cin} + \Delta E_{pot} &= 0 \\ \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 & \\ +m \cdot g \cdot h_2 - m \cdot g \cdot h_1 &= 0 \end{aligned}$$

Toutes ces expressions sont équivalentes. Il est important de bien comprendre qu'elles signifient toutes que l'énergie mécanique reste la même au cours du temps.

Il est aussi important de dire que cette loi n'est valable qu'en l'absence de frottements.

On peut alors refaire le calcul de la vitesse atteinte par un objet en chute libre d'une hauteur h d'une autre manière. On commence par déterminer l'énergie mécanique au début :

$$E_{mec}^{déb} = E_{cin} + E_{pot} = 0 + m \cdot g \cdot h$$

et à la fin du mouvement :

$$E_{mec}^{fin} = E_{pot} + E_{cin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + 0$$

et on impose que l'énergie mécanique soit conservée entre le début et la fin du mouvement :

$$0 + mg \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + 0$$

On obtient bien alors la vitesse trouvée précédemment.

Finalement, rappelons que l'on peut aussi trouver cette vitesse sans passer par l'énergie, mais en utilisant la cinématique du mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA). En effet, une chute libre est un MRUA et pour une vitesse initiale nulle, on peut écrire :

$$v^2 = 0^2 + 2 \cdot g \cdot h \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Visiblement, ce calcul est plus simple. Pourtant, il faut relativiser. En effet, l'équation utilisée résulte de la composition des deux équations du mouvement d'un MRUA. Par ailleurs, elle n'est plus valable pour un mouvement non uniformément accéléré pour lequel la méthode de la conservation de l'énergie est toujours fonctionnelle. En fin de compte, il s'agit de choisir au cas par cas s'il est plus simple d'utiliser Newton ou l'énergie.

7.8 Variation de l'énergie mécanique

En présence de frottements (forces dissipatives), on peut modifier le théorème de conservation de l'énergie mécanique en s'inspirant du théorème de l'énergie cinétique. On peut considérer le travail des forces extérieures impliquées dans ce dernier comme comprenant deux termes : l'un correspondant aux forces conservatives et l'autre aux forces dissipatives. Ainsi, on peut écrire :

$$\Delta E_{cin} = A_{F_{cons}^{ext}} + A_{F_{diss}^{ext}}$$

Or, le travail des forces conservatives représente tout simplement l'énergie potentielle qui leur correspond. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \Delta E_{cin} + \Delta E_{pot} &= A_{F_{diss}^{ext}} \\ \Rightarrow \quad \Delta E_{mec} &= A_{F_{diss}^{ext}} \end{aligned} \tag{7.8}$$

L'équation 7.8 montre que l'énergie mécanique en tant que telle n'est plus conservée. Mais on comprend bien que sa variation est en relation étroite avec la dissipation d'énergie due à la force de frottement : il y a production de chaleur. Mais cela est traité dans le chapitre 10 sur la thermodynamique.

7.9 Énergies renouvelables

Parti est pris ici de mettre en avant des énergies respectueuses de l'environnement et renouvelables. Certaines sont de réelles alternatives aux énergies non renouvelables et ont depuis longtemps fait leur preuves. D'autres commencent seulement à permettre des productions assez importantes pour être signalées. Quoi qu'il en soit, elles méritent d'être présentées avec un regard critique autant que les autres. C'est ce qui va être fait ici. Pour de plus amples renseignements on peut consulter Lhomme (2004) .

Une juste appréciation de la valeur d'un type d'énergie n'est pas une chose facile tant nombreux sont les paramètres qui doivent intervenir. Les variables à prendre en compte peuvent être d'ordre physique, géographique, politique, écologique, ... Les grandeurs physiques seront cependant privilégiées dans ce cours de physique pour des raisons évidentes. Cependant, dans la mesure du possible, plusieurs autres paramètres seront aussi abordés.

En ce qui concerne les grandeurs physiques, seront principalement utilisées :

— L'énergie E produite pendant une période donnée, en kilowattheures plutôt qu'en joules, car c'est l'usage communément répandu.
— La puissance P de production, en watt.

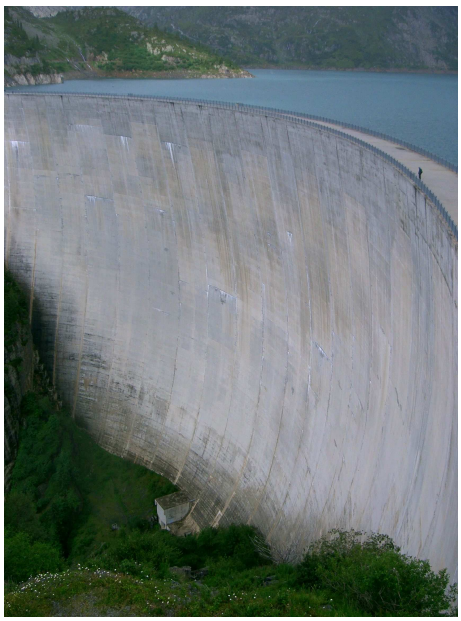
La relation liant ces deux grandeurs est, rappelons-le, $E = P \cdot t$.

Les énergies renouvelables les plus importantes (hydraulique, biomasse, solaire et éolien) représentent environ 20% de la production mondiale (Reeves et Lenoir, 2003, p. 67.).

7.9.1 Énergie hydraulique

Elle représente 18% de la production mondiale, soit plus de 700 GW. Il s'agit de la puissance installée, c'est-à-dire la puissance maximale permise par la totalité des installations. En réalité, toutes

Figure 7.3 – *Barrage d'Emosson (Suisse)*
D'une hauteur de 180 m *et largeur de* 560 m[42]



ne produisent pas toujours au maximum. En effet, comme on peut la stoker, l'énergie hydraulique est souvent sous utilisée pour compléter la demande. Elle représente donc en fait environ 10% de la production totale mondiale. En France, par exemple, environ 25 GW sont installés, pour 22% de la consommation électrique, alors que seulement 15% sont produits. Relevons qu'en Suisse, la production d'électricité est assurée à 56% par l'hydraulique.

L'idée pour la production d'énergie hydraulique est simple. Une masse d'eau située à une altitude h a une énergie potentielle qui vaut :

$$E = m \cdot g \cdot h$$

Or, le soleil, qui chauffe l'eau des océans, évapore une grande quantité d'eau qui retombe sur les montagnes sous la forme de précipitations. L'énergie fournie par le soleil se transforme donc en énergie potentielle qu'on peut stocker en retenant l'eau à l'aide de barrages. On utilise ensuite des conduites forcées pour l'amener à grande vitesse sur des turbines. L'énergie potentielle est donc transformée en énergie cinétique de rotation. Celle-ci est ensuite transformée à l'aide d'alternateurs en énergie électrique.

Il est intéressant de déterminer la puissance qu'on peut tirer d'une rivière ou d'une retenue d'eau. Elle s'exprime directement à partir de l'énergie potentielle (équation 7.3), de la définition de la puissance (équation 7.2) et de celle du débit $Q = V/t$ où V est le volume :

$$\begin{aligned} P &= \frac{E}{t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} \\ &= \frac{m}{t} \cdot g \cdot h = \frac{\rho \cdot V}{t} \cdot g \cdot h \\ &= \frac{V}{t} \cdot \rho \cdot g \cdot h = Q \cdot \rho \cdot g \cdot h \end{aligned}$$

en raison de la définition de la masse volumique :

$$\rho = \frac{m}{V} \;\Rightarrow\; m = \rho \cdot V$$

Si on considère la masse volumique de l'eau :

$$\rho_{eau} = 998\,\mathrm{kg/m^3} \simeq 1000\,\mathrm{kg/m^3}$$

on peut raisonnablement éliminer le terme ρ si on travaille en kW (et non en W) pour la puissance. On obtient alors :

$$P = Q \cdot g \cdot h$$

Mais, cette puissance constitue le maximum pouvant être atteint. En réalité, la nature de l'écoulement et des frottements interviennent pour diminuer cette puissance. Le problème du calcul de ces facteurs étant complexe, on en rend compte simplement à l'aide d'un facteur de rendement qui modère la puissance maximale. Ainsi, la "puissance de chute" se calcule par :

$$\boxed{P_{réelle} = \eta \cdot Q \cdot g \cdot h} \qquad (7.9)$$

où on a :
- la puissance P en kW,
- le débit Q en $\mathrm{m^3/s}$ et
- la hauteur de chute h en m.

Un rendement typique vaut : η =0,8=80%.

Exemple

Comparons les deux types d'installations suivantes :

1. une chute de 10 m avec un débit de 4 $\mathrm{m^3/s}$ et

2. une chute de 40 m avec un débit de 1 m^3/s.

En considérant un rendement de 90%, par exemple, les puissances P_1 et P_2 de ces deux installations sont :

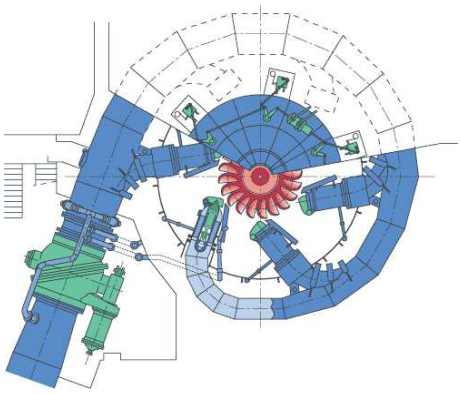
$$P_1 = 0,9 \cdot 4 \cdot 9,81 \cdot 10 = 353,16\,kW$$
$$P_2 = 0,9 \cdot 1 \cdot 9,81 \cdot 40 = 353,16\,kW$$

On a donc ici deux installations de même puissance. Mais certainement pas de même coût. En effet, il est bien plus facile (et donc moins coûteux) de faire une conduite forcée dans la montagne pour amener l'eau sur une différence d'altitude de 40 m avec un débit de 1 m^3/s que de construire une turbine adaptée à un débit de 10 m^3/s.

Types de turbines

Différents types de turbines correspondent à différentes plages d'utilisation. Il existe essentiellement trois types de turbines en fonctionnement dans le monde.

Figure 7.4 – *Turbine Pelton*
Des godets propulseurs[43]



— *Les turbines Kaplan* sont à réaction : totalement immergée dans l'eau, elles fonctionnent comme une aile d'avion. Elles ressemblent à une hélice (comme pour un bateau) généralement verticale. Elles sont utilisées pour de faibles chutes, jusqu'à 30 m, et un débit de 4 à 350 m^3/s.
— *Les turbines Francis* sont aussi à réaction et ont des pales qui les font ressembler à un réacteur d'avion. Elles sont utilisées pour de moyennes chutes, entre 10 et 700 m, et un débit de 4 à 55 m^3/s.

Figure 7.5 – *Ancienne turbine Pelton*
Barrage d'Emosson, centrale de Châtelard
43 850 kW, 500 tr min, 7135 kg *en acier inox.*

— *Les turbines Pelton* (voir figure 7.4 et 7.5), elles, sont à action : c'est la poussée du fluide qui les fait tourner. Elles ressemblent aux anciennes roues à aube, mais tournent horizontalement et sont munies de godets. Elles sont utilisées pour de hautes chutes, entre 200 et 2000 m, et un débit de 4 à 15 m^3/s.

Le rendement de ces turbines varie entre 80 et 90%.

Alternateur

Il faut relever que l'énergie cinétique de rotation des turbines est transformée en énergie électrique grâce à un alternateur. Il n'est pas ici nécessaire d'en expliquer le fonctionnement, qui relève de l'électromagnétisme. Retenons cependant que le rendement (rendement dont tient compte le facteur η de la puissance de chute) d'un alternateur est supérieur à 90%, ce qui permet de dire que la production d'électricité au moyen d'énergie hydraulique est très efficace.

Problèmes rencontrés

Il faut ici mentionner les réels problèmes posés par la construction de barrages géants, en Inde no-

tamment, qui sont loin de ne présenter que des avantages pour les populations. L'irrigation des régions alentour par exemple est bien moins importante que les espérances mises en avant par les constructeurs. Cependant, l'énergie hydraulique de moyenne et faible puissance est généralement bien tolérée. De plus, elle ne génère aucun gaz à effet de serre.

7.9.2 Énergie éolienne

Elle représente une part négligeable de l'énergie mondiale. Les raisons en sont nombreuses. Par exemple, en France :

> *"Il est demandé aux promoteurs des parcs éoliens de déposer le montant du coût de la déconstruction des machines sur un compte bloqué. C'est une disposition unique qui ne s'applique qu'à l'éolien."* (Ollivier, 2006, p. 22)

Mais l'éolien est une énergie d'avenir car il présente de nombreux avantages : production renouvelable, locale, sans effet de serre, machine facilement démontable... L'éolienne de la figure 7.6 se trouve au Mont Soleil, en Suisse, dans le Jura. Cette énergie se développe fortement aujourd'hui. Elle représentait en 1985 un réacteur nucléaire, en 2002 plus de vingt (Reeves et Lenoir, 2003, p. 91.) et en 2005 plus de 50. Des projections estiment que cela représentera plus de 200 centrales nucléaires en 2010.

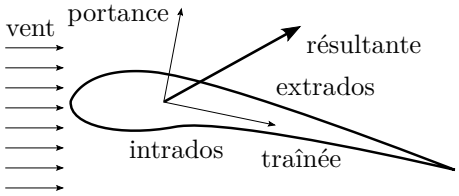
L'origine de cette énergie est encore une fois le soleil qui, en chauffant l'air au-dessus des océans, crée les déplacements de masses atmosphériques responsables des vents.

Le principe de fonctionnement d'une éolienne semble évident. Pourtant, il est très complexe. Faisant appel à des notions de dynamique des fluides, il n'est pas question de l'aborder en détail ici. Pourtant on peut dire, en substance, qu'une pale d'une éolienne se comporte comme une aile d'avion. Il se crée autour d'elle un écoulement de l'air qui aboutit à une diminution de la pression sur l'extrados, la partie supérieure de l'aile, et une augmentation sur l'intrados, la partie inférieure. Le résultat est qu'une force, de portance dans le cas d'un avion ou de traction dans le cas d'une éolienne, apparaît comme le montre la figure 7.7.

Encore une fois, l'écoulement de l'air autour d'une pale d'éolienne est très complexe, d'autant

Figure 7.6 – *Éolienne*
L'énergie paisible

Figure 7.7 – *Pale d'éolienne*
Portance et traînée d'une aile



plus que la vitesse de l'air augmente à mesure qu'on s'approche de son extrémité. En effet, la vitesse à l'extrémité d'une pale de 30 m tournant à 30 tr/min ($T = 2\,\text{s/tr}$) vaut :

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 30}{2} = 94\,\text{m/s} = 339\,\text{km/h}$$

Alors qu'à 4 m de l'axe, elle vaut :

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4}{2} = 13\,\text{m/s} = 45\,\text{km/h}$$

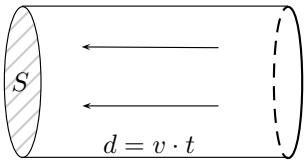
Mais le résultat d'un calcul très simplifié permet une première évaluation de la puissance maximale que peut fournir une éolienne. Il est connu sous le

nom de règle de Betz. Même s'il est approximatif, il est intéressant. Sa démonstration est donné à l'annexe K.3.1.

On peut estimer la puissance du vent en calculant l'énergie cinétique d'un cylindre d'air de surface à la base S et de hauteur d, comme présenté à la figure 7.8. Sa base correspondant à la surface balayée par les pales de l'éolienne, il constitue une masse m qui traverse l'éolienne à la vitesse v.

Figure 7.8 – *Tube de vent*

La puissance du vent



Le volume d'air V qui traverse la surface S en un temps t donné est :

$$V = S \cdot d = S \cdot v \cdot t$$

Or, la définition de la masse volumique permet d'écrire :

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot v \cdot t$$

Ainsi, le débit vaut :

$$D = \frac{m}{t} = \frac{\rho \cdot V}{t} = \frac{\rho \cdot S \cdot v \cdot t}{t} = \rho \cdot S \cdot v$$

Par définition de la puissance, on a alors :

$$\begin{aligned} P_{vent} &= \frac{E_{cin}}{t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{t} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{t} \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot v^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot v \cdot v^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot v^3 \end{aligned} \tag{7.10}$$

Par ailleurs, voir l'annexe K.3.1, en supposant que l'éolienne prenne une partie ΔP de cette énergie avec pour conséquence une diminution de la vitesse v_{av} en aval de l'hélice par rapport à celle v_{am} en amont, on montre que :

$$\Delta P = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot S \cdot (v_{am}^2 - v_{av}^2)(v_{am} + v_{av})$$

Par dérivation de ΔP en fonction de v_{av}, on trouve la vitesse en aval qui donne le maximum de puissance à l'éolienne :

$$v_{av} = \frac{1}{3} \cdot v_{am} = \frac{1}{3} \cdot v \tag{7.11}$$

Et on peut calculer la puissance maximale que l'éolienne peut tirer du vent :

$$\boxed{\Delta P = \frac{16}{27} \cdot P_{vent}} \tag{7.12}$$

Ce qui représente pratiquement 60% de la vitesse du vent et constitue la limite de Betz.

Finalement, mentionnons que l'énergie grise nécessaire à la fabrication et à l'installation des éoliennes représente moins d'une année de leur production. Pour des machines exploitées au minimum vingt ans cela représente un maximum de 5% d'énergie grise.

7.9.3 Énergie solaire

Une bonne compréhension des phénomènes physiques permettant de produire de l'énergie à partir du rayonnement solaire dépasse totalement le cadre de ce cours. Notamment, elle nécessiterait une étude des propriétés du rayonnement électromagnétique, de ses relations avec la matière (absorption, émission et effet photoélectrique), de son rôle dans l'effet de serre ou dans la production d'électrons par les matières photoélectriques. Elle nécessite aussi des connaissances dans le domaine de l'optique réflective, dans le domaine de la thermodynamique (conduction, convection ...), etc.

Énergie solaire thermique

L'énergie solaire thermique est très prometteuse. En effet, elle est très simple à réaliser, d'un coût très modeste, totalement non polluante, sans rejet de gaz à effet de serre, elle se branche facilement sur une autre installation de chauffage. Elle est essentiellement utilisée dans deux cas :

1. la production d'eau chaude sanitaire (ECS) et
2. pour le chauffage.

Étant donné les variations naturelles d'ensoleillement, la production d'eau chaude à l'aide d'énergie

solaire thermique n'est pas toujours suffisante. Il faut donc un chauffage d'appoint (bois, gaz naturel, combustion des ordures, ... éventuellement pétrole). Pour donner un ordre de grandeur, on considère que 60% de l'eau chaude sanitaire d'une maison individuelle comprenant une famille de deux adultes et trois enfants est couverte avec 5 à $8\,\mathrm{m}^2$ de panneaux solaires.

Le principe de fonctionnement est en substance le suivant. L'énergie solaire parvient jusqu'à la Terre sous la forme de rayonnement visible. Ce rayonnement échauffe la matière sur laquelle il arrive jusqu'à ce qu'elle réémette sous la forme de rayonnement infrarouge la même quantité d'énergie qu'elle reçoit. Il se produit alors un équilibre thermique.

En plaçant un vitrage au-dessus de la surface, on empêche alors le rayonnement infrarouge réémis par la matière de se perdre. Il est redirigé vers elle par le vitrage et sert ainsi à élever encore la température.

Les cellules solaires thermiques se composent donc d'un vitrage et d'une couche d'air au-dessus d'un matériau thermiquement absorbant généralement noir qui recouvre des tubes dans lesquels circule le fluide caloporteur (souvent de l'eau avec un antigel) qui va transporter la chaleur au "boiler", un récipient d'eau chaude. Celui-ci fait office de dispositif de stockage et est donc parfaitement isolé thermiquement. C'est lui qui va délivrer l'eau chaude sanitaire pour les robinets, la douche, la machine à laver, etc. Évidemment, on peut aussi relier le "boiler" à un système de chauffage de la maison (radiateurs, chauffage au sol, etc). La figure 7.9 présente schématiquement la situation.

Ce qui va nous intéresser ici plus particulièrement est l'aspect énergétique de ce type de production. Il faut tout d'abord savoir qu'après avoir traversé l'atmosphère, la lumière solaire parvenant au sol représente en moyenne une puissance de $185\,\mathrm{W/m}^2$ (compte tenu de l'alternance jour-nuit et des conditions météorologiques). Pour l'ensemble de l'Europe du Nord, elle représente une puissance moyenne d'environ $100\,\mathrm{W/m}^2$. Bien entendu, elle est fonction du lieu géographique et plus particulièrement de la latitude. Par exemple, pou la France, le rayonnement moyen par année représente une énergie de $1400\,\mathrm{kWh/m}^2$, soit une puissance de :

$$P = \frac{E}{t} = \frac{1400 \cdot 10^3}{365 \cdot 24} = 160\,\mathrm{W/m}^2 \qquad (7.13)$$

En raison des pertes, les capteurs solaires ne peuvent tirer qu'une partie de cette puissance. Celle-ci est déterminée par le rendement optique qui caractérise la puissance lumineuse récupérée par le capteur et par les pertes thermiques. Or, ces dernières varient en fonction de la différence de température entre le fluide qui circule dans les capteurs et la température extérieure. Si on note :

- P la puissance par unité de surface incidente sur le capteur,
- S la surface totale des capteurs,
- B le rendement optique,
- K le cœfficient des pertes du capteur,
- T_i la température à l'intérieur du capteur et
- T_e la température à l'extérieur,

la puissance utile ΔP est alors donnée par :

$$\Delta P = S \cdot (B \cdot P - K \cdot (T_i - T_e)) \qquad (7.14)$$

Typiquement, on a un cœfficient B compris entre 0,7 et 0,8 pour des capteurs plans, un cœfficient K entre 1 et $5\,\mathrm{W/(m^2{}^\circ C)}$, T_i de l'ordre de $45\,^\circ\mathrm{C}$ et T_e de $20\,^\circ\mathrm{C}$. Ainsi, pour la France, on a en moyenne pour un mètre carré :

$$\Delta P = 0,8 \cdot 160 - 3 \cdot (45 - 20) = 53\,\mathrm{W}$$

Ce qui en terme de production énergétique annuelle correspond à :

$$E = P \cdot t = 0,053 \cdot 365 \cdot 24 = 464\,\mathrm{kWh/m}^2$$

Ainsi, une installation de $5\,\mathrm{m}^2$ de surface permet d'obtenir une production d'énergie annuelle $E = 5 \cdot 464 = 2320\,\mathrm{kWh/a}$. Évidemment, il s'agit d'un ordre de grandeur, car le problème est en réalité très complexe. Beaucoup d'autres paramètres, comme l'orientation et le type des capteurs, le système de stockage de l'énergie ... interviennent aussi et, généralement, on utilise des logiciels de dimensionnement qui les prennent en compte afin de déterminer correctement les besoins.

Relevons enfin de nouvelles dispositions en faveur du solaire thermique. Comme dans le cas de la ville de Barcelone qui impose à toute nouvelle construction ou pour les bâtiments réhabilités que la consommation d'eau chaude sanitaire soit couverte au minimum à 60% par du solaire thermique. Cette législation a déjà créé beaucoup d'emplois localement pour subvenir aux besoins.

Figure 7.9 – *Solaire thermique*
Eau chaude sanitaire par solaire thermique

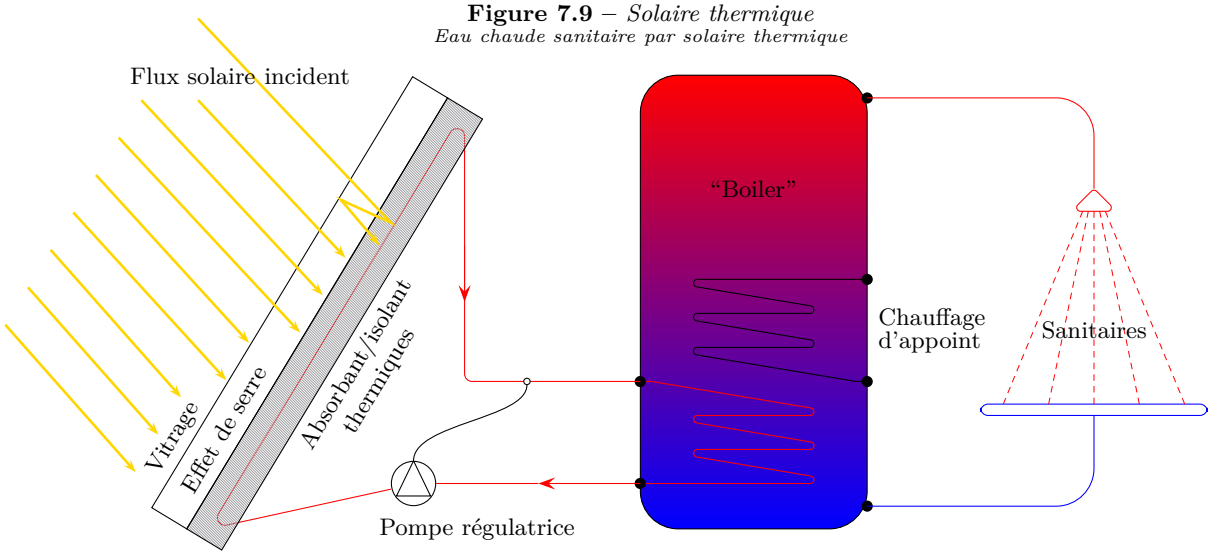


Figure 7.10 – *Effet photoélectrique*
Ou effet photovoltaïque[44]

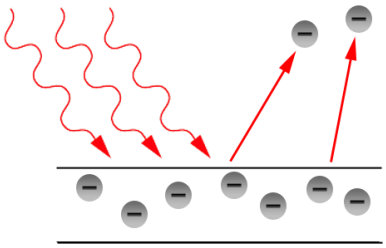
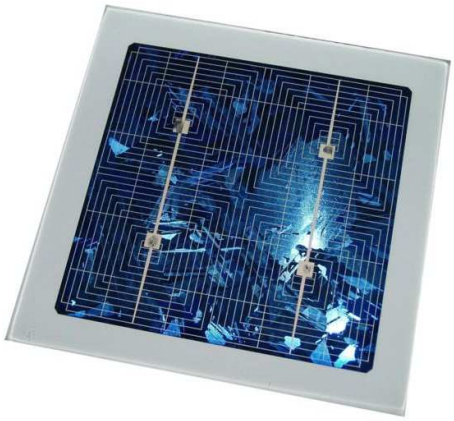


Figure 7.11 – *Cellule photoélectrique*
Ou cellule photovoltaïque[45]



Énergie solaire électrique

Le principe de base est celui découvert par Heinrich Rudolf Hertz en 1887 et expliqué par Albert Einstein en 1905 : l'effet photoélectrique. Sans vouloir tenter ici l'explication d'un phénomène complexe touchant à la lumière et à l'électricité, on peut dire simplement que certaines matières émettent spontanément des électrons, et donc un courant électrique, quand elles sont soumises à de la lumière (voir figure 7.10).

Le rendement courant des cellules photoélectriques (voir figure 7.11) actuelles se situe entre 10 et 20% de la puissance solaire incidente (silicium polycristallin : ∼13% et monocristallin : ∼17%). Ainsi, la puissance développée par de telles cellules se situe-t-elle, pour une puissance incidente de $160\,\mathrm{W/m^2}$ (voir l'équation 7.13), aux alentours des $20\,\mathrm{W/m^2}$. Sachant que la consommation électrique annuelle d'une famille de cinq personnes en Europe est d'environ 2000 kWh, la puissance nécessaire est de :

$$P = \frac{E}{t} = \frac{2'000 \cdot 10^3}{365 \cdot 24} = 228\,\mathrm{W}$$

Ce qui représente plus de $10\,\mathrm{m^2}$ de surface et est important. On peut raisonnablement penser que la moitié de celle-ci peut être installée sur une habi-

tation de particulier. Le rendement est donc deux fois trop faible. De nouvelles générations de cellules sont donc nécessaires. Elles existent déjà et des rendements supérieurs à 30% ont été obtenus en laboratoire, mais pas encore en production.

Deux autres points doivent aussi être abordés. Celui de l'énergie "grise" nécessaire pour la construction des cellules et celui de leur recyclage. En effet, une idée fausse court à propos de l'énergie solaire électrique. Il s'agit du fait que les cellules nécessiteraient plus d'énergie pour être produites qu'elles ne sont capables d'en fournir. Or, l'énergie nécessaire[46] pour fabriquer et installer les cellules est de l'ordre de $E_{fab} = 420\,\mathrm{kWh/m^2}$. Avec une puissance de l'ordre de $20\,\mathrm{W/m^2}$, qui représente une énergie $E = 20 \cdot 24 \cdot 365 = 175{,}2\,\mathrm{kWh/a}$, il faut :

$$n = \frac{420}{175,2} = 2{,}4\,\mathrm{ans}$$

pour que la cellule ait produit l'équivalent de ce que sa production a nécessité. Sur une durée de fonctionnement entre vingt et trente ans, le bilan énergétique est très favorable[47]. En effet, pour vingt ans d'utilisation, l'énergie produite est :

$$E = 20 \cdot 20 \cdot 24 \cdot 365 = 3504\,\mathrm{kWh}$$

L'énergie nécessaire à la fabrication est donc de l'ordre de 12% de l'énergie totale produite sur vingt ans, ce qui constitue une durée minimum d'exploitation.

De plus, l'énergie produite par une installation solaire électrique est propre : il n'y a pas d'émission de gaz à effet de serre et aucun déchet puisque les anciens panneaux sont recyclables.

7.9.4 Énergie géothermique

Plus on s'enfonce dans la croûte terrestre, plus la température augmente. L'ordre de grandeur de l'élévation de température par 100 mètres de profondeur varie entre 3, dans les régions sédimentaires, et 30 °C, dans les régions volcaniques.

On distingue essentiellement deux types de géothermie, exception faite de la géothermie de surface représentée par les pompes à chaleur :

la géothermie à haute énergie, qui exploite des sources très chaudes, supérieures à 100 °C à 150 °C, grâce à des forages très profonds dans lesquels de l'eau sous pression est injectée. Elle permet d'utiliser de la vapeur d'eau sous pression pour faire tourner une turbine productrice d'électricité.

la géothermie à basse énergie, qui exploite des sources d'une température variant de 30 °C à 100 °C, à des profondeurs allant de quelques centaines de mètres à plusieurs kilomètres. Elle sert essentiellement aux réseaux de chauffages urbains.

Différentes applications peuvent être envisagées industriellement. Elle sont présentées dans le tableau 7.12.

Malgré tous les atouts de la géothermie, c'est une énergie encore relativement peu exploitée. Même si elle permet une production continue d'énergie, elle peut aussi parfois mener à des séismes, comme ce fut le cas à Bâle, en Suisse, où des tests de production d'énergie géothermique ont mené à des secousses assez importantes pour arrêter l'expérience.

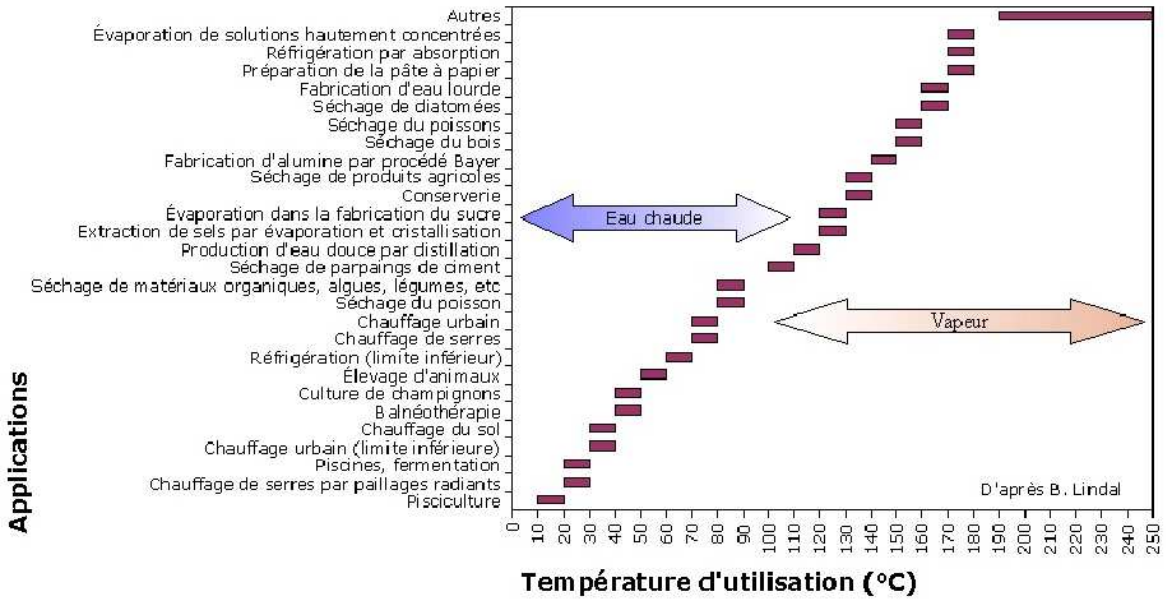
En Suisse, la puissance installée est de 525 MW. La centrale géothermique de Riehen, près de Bâle, produit 22,8 GW h. Elle est brièvement décrite à l'annexe K.4.

7.10 Énergies non renouvelables

Les sources d'énergie non renouvelables produisent aujourd'hui une partie importante de l'énergie mondiale. Les prix associés à cette énergie sont bas, car il ne prennent pas en compte le coût de leur impact sur l'environnement comme les coûts des marées noires, des accidents nucléaires, du traitement des déchets radioactifs, de la pollution atmosphérique associée aux transports, etc. Il semble aujourd'hui évident que ces types d'énergies ne sont pas appropriés à la pérennité de l'humanité.

Cependant, aujourd'hui, on ne peut les passer sous silence tant ils sont présents et... dangereux. L'exposé qui va en être fait ici a pour but d'en donner le principe et de présenter les problèmes qu'ils posent.

Figure 7.12 – *Applications de la géothermie*
Selon Lindal[48]



7.10.1 Énergie nucléaire

Fission

Elle représente 6% de la production mondiale (Reeves et Lenoir, 2003, p. 67.).

L'idée est relativement simple. Pour construire des atomes lourds, il est nécessaire de fournir de l'énergie pour vaincre la répulsion électrostatique des protons à l'intérieur du noyau de l'atome. Cette énergie est en quelque sorte stockée dans les liaisons créées par la force forte entre nucléons du noyau. Elle se présente sous la forme d'un défaut de masse qui existe entre les éléments du noyau pris séparément et le noyau constitué. Ce défaut de masse constitue une énergie récupérable à la séparation des éléments : la fission du noyau père. En effet, passé une certaine distance, la répulsion électrostatique devient plus importante que la force forte et la fission transmet aux noyaux fils une importante énergie cinétique qui peut être récupérée par collision avec les atomes de la matière.

Dans le cas de l'uranium, la réaction est la suivante (voir figure 7.13) :

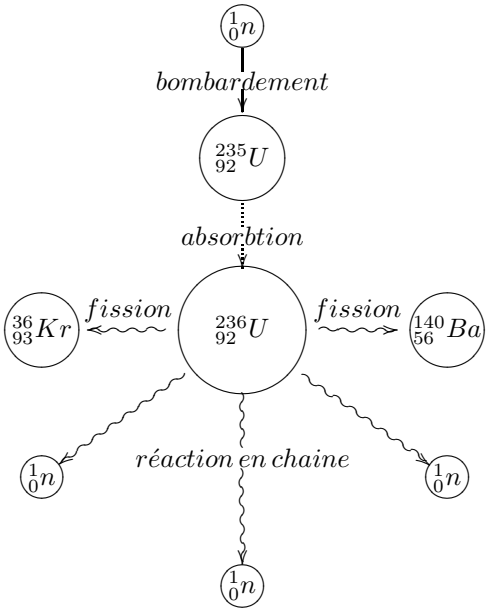
$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{93}_{36}Kr + ^{140}_{56}Ba + 3\,^{1}_{0}n$$

Pratiquement 81,5% de l'énergie est transmise aux éléments fils de la fission (le Kr et le Ba), soit 166 MeV. Le reste se retrouve dans les autres sous-produits.

On voit qu'il est nécessaire de disposer d'un neutron pour casser le noyau d'uranium. Mais on voit aussi que la fission produit trois neutrons. Pour obtenir beaucoup d'énergie, il faut briser beaucoup de noyaux et pour cela créer une réaction en chaîne, c'est-à-dire utiliser les trois neutrons produits pour casser d'autres noyaux. Évidemment, plus grande sera la masse d'uranium, plus la réaction en chaîne sera importante. Il existe même une masse critique à partir de laquelle la réaction en chaîne persiste. Le problème est que cette réaction en chaîne peut s'emballer. Il faut donc la contrôler en insérant au milieu de la matière fissile des barres de contrôle contentant un matériau qui absorbe les neutrons (bore ou cadmium). Le contrôle se fait alors par insertion ou retrait des barres (voir figure 7.14).

La matière fissile chauffe donc simplement un fluide caloporteur qui se transforme en vapeur et fait tourner une turbine productrice d'électricité. Il est naturellement nécessaire d'avoir une source froide pour condenser la vapeur. On utilise l'eau

Figure 7.13 – *Fission de l'uranium*



des rivières et des tours de refroidissement. La vapeur est refroidie dans ces dernières par un courant d'air ascendant qui en emporte une petite partie. C'est pourquoi on voit un panache au sommet de ces tours.

D'autre part, il est évidemment impossible de passer sous silence les gros problèmes liés aux déchets fortement radioactifs ainsi que les risques d'accidents majeurs liés aux centrales nucléaires, comme celui de Tchernobyl. Nous allons rapidement aborder aussi objectivement que possible ces deux points.

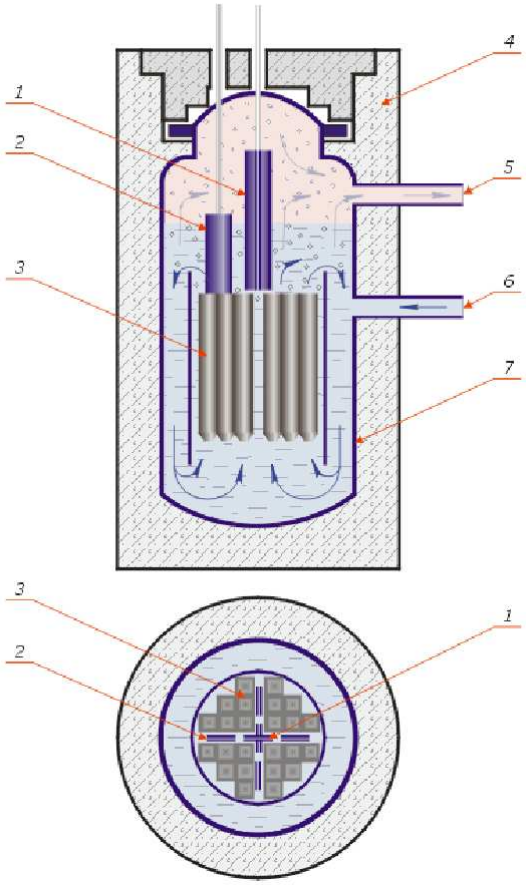


Figure 7.14 – *Réacteur nucléaire*

Réacteur à eau bouillante[49]
1. Barre d'arrêt d'urgence.
2. Barre de contrôle.
3. Assemblage combustible.
4. Protection biologique.
5. Sortie de la vapeur.
6. Entrée de l'eau.
7. Protection thermique.

Déchets radioactifs Les produits de la fission sont radioactifs. Ils émettent des rayons β^-, c'est-à-dire des électrons. Le processus de radioactivité est dû à la force faible (voir paragraphe 1.2.7), qui est une force fondamentale. La matière qui constitue ce type de déchets obéit à une loi de décroissance radioactive très précise. On parle de demi-vie d'un élément pour quantifier le temps qu'il met pour que son activité, c'est-à-dire le nombre de désintégrations par seconde qu'il produit, diminue de moitié. Deux grandeurs sont donc importante : l'activité et la demi-vie.

Les déchets véritablement dangereux sont évidemment les déchets de grande activité et de demi-vie longue [a]. Ces déchets ont des demi-vies de plusieurs centaines de milliers d'années, voire de mil-

a. Comme l'activité croît comme l'inverse de la demi-vie, les déchets de demi-vie longue ont une activité relativement faible, mais pas négligeable pour autant. Cela dit, les déchets vraiment dangereux sont donc ceux de grande activité et de demi-vie assez longue.

lions d'années. Le seul moyen d'arrêter le processus de désintégration radioactive serait de transmuter les déchets en d'autres éléments moins radioactifs et de demi-vie plus courte. L'idée est de bombarder ces déchets de neutrons pour les amener à se transformer en d'autres éléments. Mais, de l'aveu même des partisans du nucléaire, cela peut produire d'autres éléments à demi-vie longue qui pourraient annuler le bénéfice de l'opération. Clairement, la technologie n'est pas maîtrisée, malgré le temps et les sommes importantes investies. Par ailleurs, le coût d'un tel programme de transmutation serait prohibitif.

Accidents nucléaires On ne mentionnera ici que le plus important accident survenu en 1986 à la centrale nucléaire de Tchernobyl.

L'accident s'explique assez simplement, suite à une série d'erreurs des techniciens de la centrale, par un échauffement accidentel du cœur du réacteur qui se met à fondre. La chaleur libérée permet une radiolyse de l'eau, le fluide destiné à transporter la chaleur, et la recomposition de l'hydrogène et de l'oxygène produit des explosions qui éjectent les barres de contrôle. Cela amène le cœur à exploser et projette dans l'atmosphère une grande quantité d'éléments radioactifs.

Sans entrer plus dans les détails, on peut remarquer qu'il a été dit avant l'accident qu'une centrale ne pouvait exploser, au contraire d'une bombe atomique. C'est pourtant ce qui s'est passé à Tchernobyl. Les différentes zones touchées représentent plusieurs dizaines de milliers de personnes, au bas mot. Le nombre reconnu de morts suite à cet accident varie de quelques dizaines de personnes selon l'Organisation Mondiale de la Santé (de concert avec l'Agence Internationale pour l'Énergie Atomique avec laquelle elle a passé un accord d'intérêts !) à plusieurs dizaines de milliers de personnes, voire beaucoup plus, selon des sources non-gouvernementales. Enfin, il faut mentionner que la zone contaminée, vaste et mal déterminée, est désormais interdite pour des centaines d'années.

Fusion

Il convient ici de mentionner rapidement une source très hypothétique d'énergie. Il s'agit de l'énergie disponible par la fusion d'éléments comme le deutérium et le tritium selon la réaction :

$$^2H + ^3H \longrightarrow ^4He + n + 17,6\,MeV$$

Le problème est que les noyaux de deutérium et de tritium se repoussent fortement en raison de la présence de leurs protons. Il est donc d'abord nécessaire de les faire se rencontrer à l'aide de lasers très puissants. Puis, il faut confiner la réaction à l'aide de forts champs magnétiques par exemple, pour pouvoir l'exploiter. Cela fait plusieurs dizaines d'années que les physiciens envisagent l'avènement de cette énergie comparable, selon eux, à celle produite au centre du soleil. Mais tous ne pensent pas ainsi :

> "*De tous côtés, y compris chez les physiciens, on entend dire que les scientifiques vont ainsi reproduire sur Terre les réactions existant à l'intérieur du Soleil. C'est faux ! S'il est vrai que l'énergie solaire vient de réactions de fusion se produisant dans ses régions centrales, il s'agit de réactions très différentes [. . .] Et pour cause : la première réaction solaire se produit très, très lentement. Il faut attendre plus de dix milliards d'années pour que la fusion de l'hydrogène s'accomplisse intégralement dans le Soleil. On n'imagine pas un [réacteur terrestre] demandant de telles échelles de temps pour produire son énergie.*"
>
> (Vauclair, 2006, pp. 154,155)

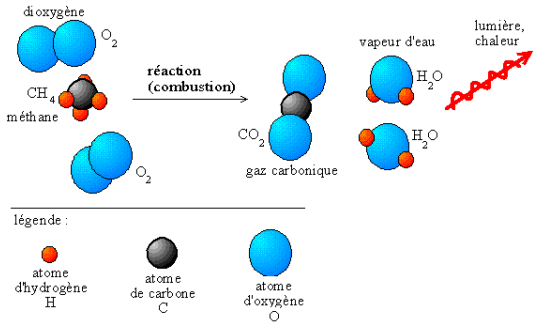
Et il faut bien reconnaître qu'à part dans les bombes à hydrogène (bombes H) jamais l'homme n'est parvenu à produire de l'énergie par fusion.

7.10.2 Énergie de combustion : pétrole et gaz

Elle représente 74% de la production mondiale (Reeves et Lenoir, 2003, p. 67.).

Ce n'est pas ici le lieu d'expliquer la combustion chimique du fioul (mazout) qui est la principale source de chauffage des bâtiments dans le monde. Il faut cependant évoquer les deux problèmes principaux de ces deux types d'énergie : le pétrole et le gaz naturel. Ce sont des énergies hautement polluantes et non-renouvelables. La figure 7.15 présente la combustion du méthane.

Figure 7.15 – *Combustion du méthane*
Gaz naturel[50]



On remarque qu'en présence d'oxygène la molécule de méthane (CH_4) brûle pour donner de la vapeur d'eau, du gaz carbonique et de la chaleur. Évidemment le problème de pollution vient du gaz carbonique qui est un gaz à effet de serre. Rejeté dans l'atmosphère en grande quantité, il réagit comme un vitrage de cellules solaires thermiques. Le flux solaire incident (essentiellement du visible) le traverse, parvient à la Terre qu'il chauffe. Celle-ci renvoie une partie de cette énergie sous forme de rayonnement infrarouge qui, sans gaz à effet de serre, se disperse dans l'espace. En présence de gaz à effet de serre, il est réfléchi par l'atmosphère vers la Terre qu'il contribue ainsi à chauffer.

Il en est de même du chauffage au pétrole.

On connaît les problèmes liés à de telles énergies qu'il faut aller puiser en des endroits bien précis de la Terre. Ces énergies sont fortement localisées et en quantité limitée. Elles représentent donc des enjeux d'importance qui mènent à des affrontements diplomatico-militaires.

Résumé des grandeurs et unités

Grandeur	**Symbole**	**Unité**
Travail	A ou W	J, cal, kWh
Puissance	P	W
Énergie potentielle	E_{pot}	J, cal, kWh
Énergie cinétique	E_{cin}	J, cal, kWh
Énergie mécanique	E_{mec}	J, cal, kWh
Énergie thermique	U	J, cal, kWh
Chaleur	Q	J, cal, kWh

Résumé des relations concernant l'énergie

Définition des grandeurs et **Relations particulières**

$$A = F \cdot d \tag{7.15}$$
$$E_{pot} = m \cdot g \cdot h \tag{7.16}$$
$$E_{cin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \tag{7.17}$$
$$E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} \tag{7.18}$$
$$P = \frac{E}{t} \tag{7.19}$$
$$Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta \tag{7.20}$$
$$P_{bar} = \eta \cdot Q \cdot g \cdot h \tag{7.21}$$
$$\Delta P_{éol} = \frac{16}{27} \cdot P_{vent} \tag{7.22}$$

Lois fondamentales

$$\Delta E_{cin} = \sum A_{F^{ext}} \tag{7.23}$$
$$\Delta E_{mec} = 0 \tag{7.24}$$
$$\Delta E_{mec} = A_{F^{ext}_{diss}} \tag{7.25}$$
$$Q = \Delta U + A \tag{7.26}$$

Figure 7.16 – *Résumé de l'énergie*

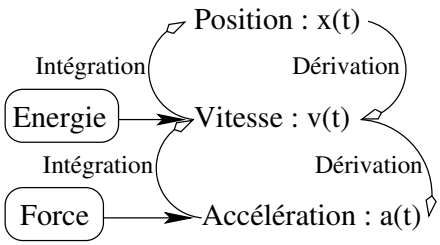
Chapitre 8

L'énergie

8.1 Introduction

Avec la physique de Newton, tout problème de mécanique peut être résolu. Mais le problème fondamental de cette dynamique est que toutes les grandeurs utilisées sont en constante évolution au cours du temps. L'idée d'une mécanique se situant au niveau de grandeurs conservée au cours du temps est donc apparue. Nous allons voir que cette "nouvelle" mécanique utilise des grandeurs comme la vitesse. Cela situe cette théorie à un niveau différent de la mécanique de Newton puisque celle-ci, à travers la seconde loi, lie la cause du mouvement à l'accélération, alors que la conservation de l'énergie est liée à la vitesse. On peut résumer cela comme dans la figure 8.1.

Figure 8.1 – *Énergie et vitesse*



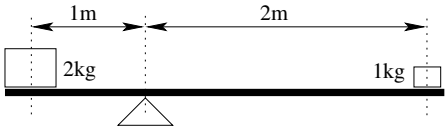
La conséquence mathématique de cette nouvelle situation du problème est que l'intégration nécessaire pour obtenir la vitesse à partir de l'accélération est supprimée. Si la grandeur recherchée est la vitesse (ou la position) le problème est donc considérablement simplifié.

8.2 Le travail

8.2.1 Historiquement

En physique, le travail est une notion bien précise. Elle a pour origine l'expérience simple décrite sur la figure 8.2 :

Figure 8.2 – *Balance à fléau*



L'idée est la suivante : on considère une balance équilibrée par deux masses. La condition d'équilibre veut que :

$$m_{gauche} \cdot d_{gauche} = m_{droite} \cdot d_{droite}$$

ce qui est le cas sur la figure 8.2.

Maintenant, si on descend la masse m_{gauche} de 10 cm, la masse m_{droite} monte de 20 cm. En effet :

$$\frac{0,1}{1} = \sin(\alpha_{support}) = \frac{0,2}{2}$$

Ainsi, on remarque que le produit A du poids de la masse par la hauteur déplacée est le même pour les deux masses :

$$A_{gauche} = 2 \cdot 9,81 \cdot 0,1 = 1 \cdot 9,81 \cdot 0,2 = A_{droite}$$

La grandeur $A = F \cdot d$ est donc identique. On peut traduire cette remarque en disant que le travail (A pour Arbeit) pour monter une masse de 1

kg sur une hauteur de 20 cm est le même que celui pour monter une masse de 2 kg sur 10 cm.

Attention, il ne faut pas voir là déjà une conservation. Bien entendu, il y a derrière cette expérience la conservation de l'énergie. Mais le concept de travail utilisé ici, s'il est intimement lié à celui d'énergie potentielle, comme nous le verrons par la suite, reste lié à un déplacement et non à un équilibre, à une situation spatiale des corps utilisés. C'est pourquoi il traduit la naissance de la notion de travail. Cependant cette liaison avec la conservation de l'énergie est assez typique pour que cet exemple ait sa place ici, même si il peut porter à confusion.

8.2.2 Définition

Travail simple

La définition la plus simple que l'on puisse envisager est donc :

$$A_{F,d} = F \cdot d$$

Cette définition correspond au travail A d'une force F s'exerçant sur une masse m que l'on déplace sur une distance d (voir figure 8.3).

Figure 8.3 – *Travail simple*

Remarquons qu'il s'agit toujours du travail d'une force sur une distance donnée. Parler du travail sans aucune autre précision n'a pas de sens.

Travail et produit scalaire

Une force qui ne s'exercerait pas parallèlement (et dans le même sens) que le déplacement, ne pourrait pas produire un travail simple. On peut comprendre intuitivement qu'une force s'exerçant perpendiculairement au déplacement ne travaille pas. On peut donc définir le travail d'une manière plus générale :

$$A_{F,d} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d} = \left\| \overrightarrow{F} \right\| \cdot \left\| \overrightarrow{d} \right\| \cos(\alpha) = F \cdot d \cdot \cos(\alpha)$$

Cette définition correspond à la situation de la figure 8.4.

Figure 8.4 – *Travail et produit scalaire*

Attention, cette définition est valable pour un déplacement rectiligne et une force constante vectoriellement.

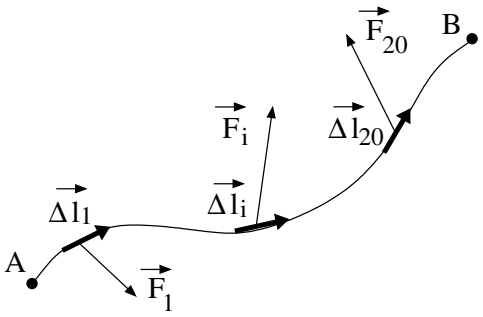
Remarquons les cas particuliers de cette définition :

1. Si $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{d}$ sont parallèles et de même sens ($\overrightarrow{F} \uparrow\uparrow \overrightarrow{d}$), alors le travail est simple.
2. Si $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{d}$ sont perpendiculaires ($\overrightarrow{F} \perp \overrightarrow{d}$), alors $\cos(\alpha) = 0$ et le travaille est nul. On dit que la force ne travaille pas.
3. Si $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{d}$ sont parallèles, mais de sens opposés ($\overrightarrow{F} \uparrow\downarrow \overrightarrow{d}$), alors le travail est simple, mais négatif.

Travail cas général

Dans ce cas, le déplacement n'est pas forcément rectiligne et la force pas forcément constante vectoriellement. La situation générale correspond donc à la figure 8.5 :

Figure 8.5 – *Travail en général*



Ainsi, pour déterminer le travail total effectué par la force sur le chemin A-B, il faut décomposer ce dernier en petits bouts de déplacement rectilignes $\overrightarrow{\Delta l}$, sur lesquels la force peut être considérée comme vectoriellement constante (c'est-à-dire qu'elle ne change ni en direction, ni en sens, ni en grandeurs).On est ainsi ramené au calcul d'un petit

élément de travail A_i, pour une force $\overrightarrow{F_i}$ constante, sur un déplacement $\overrightarrow{\Delta l_i}$:

$$A_i = \overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{\Delta l_i}$$

Puis, on somme tous les A_i pour obtenir le travail total de A à B :

$$A_{AB} \cong \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\Delta l_i}$$

Bien entendu, plus les segments $\overrightarrow{\Delta l_i}$ sont petits, plus on "colle" au parcours. A la limite, si les $\overrightarrow{\Delta l_i}$ devenaient infiniment petits, on obtiendrait la valeur exacte du travail sur le trajet AB. On peut donc écrire :

$$A_{AB} = \lim_{\overrightarrow{\Delta l_i} \to 0} \sum_{i}^{\infty} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\Delta l_i} = \int_A^B \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl}$$

La définition tout-à-fait générale du travail est donc finalement :

$$\boxed{A = \int_A^B \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl}} \tag{8.1}$$

Finalement, il faut indiquer les unités SI du travail. On a :

$$[A] = [F] \cdot [l] = N \cdot m = J = Joules$$

Exemples

1. Quel est le travail simple effectué par une force F de 5 N, sur une distance d de 5 m ?
   Solution :
   $$A = F \cdot d = 5 \cdot 5 = 25\,\text{J}$$
2. Quel est le travail effectué par une force F de 5 N, s'exerçant avec un angle de 20° par rapport au déplacement, sur une distance de 5 m ?
   Solution :
   $$A = F \cdot d \cdot \cos(\alpha) = 5 \cdot 5 \cdot \cos(20°) = 23{,}5\,\text{J}$$
3. Quel est le travail effectué par une force de frottement F de 5 N, sur une distance d de 5 m ?
   Solution :
   $$A = F \cdot d \cdot \cos(\alpha) = 5 \cdot 5 \cdot \cos(180°) = -25\,\text{J}$$
   car la force de frottement s'exerce toujours dans le sens contraire du déplacement.
4. Quel est le travail effectué par une force F de valeur l, colinéaire (parallèle) au déplacement rectiligne et de même sens, sur une distance de 5 m.
   Solution :
   $$A = \int_0^5 \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_0^5 F \cdot dl \quad \uparrow \; car \;\; \overrightarrow{F} \uparrow\uparrow \overrightarrow{dl} = \int_0^5 l \cdot dl$$
   $$= \tfrac{1}{2} \cdot l^2 \big|_0^5 = \tfrac{1}{2} \cdot (25 - 0) = 12,5\,J$$

8.3 L'énergie

8.3.1 Introduction

L'idée d'énergie est intimement liés à celle de travail. En effet, lorsqu'on fournit un travail, quelque chose est produit. De la chaleur par exemple lorsque qu'on s'intéresse au travail de la force de frottement d'une table sur laquelle on déplace un objet. Cependant, on peut se demander ce qui est produit lorsqu'on fournit un travail pour monter une masse ou pour augmenter sa vitesse. En réalité, dans les deux cas on produit de l'énergie, potentielle et cinétique respectivement.

8.3.2 Énergie potentielle

Quand on travaille pour monter une charge, on produit de l'énergie potentielle. Cette énergie peut être retrouvée si on lâche alors la masse. Arrivé en bas, cette dernière est capable de produire une déformation traduisant un travail. Tout se passe donc comme si l'énergie potentielle était quelque chose de stocké dans la masse alors qu'elle se trouve à une hauteur déterminée. Bien entendu, plus la hauteur est grande, plus l'énergie potentielle est importante (une pierre de 10 g lâchée de 10 m fera plus de dégâts arrivée au sol que la même pierre lâchée de 1 m). De même pour la masse.

Pour déterminer la valeur de l'énergie potentielle contenue dans une masse m placée à une hauteur h, il faut donc calculer le travail que cette masse

produit en chutant depuis cette hauteur. Plus précisément, il faut calculer le travail du poids de la masse m se déplaçant sur la hauteur h. On doit donc écrire :

$$\begin{aligned} A &= \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d} = m\overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{h} = mg \cdot h \qquad \text{car } m\overrightarrow{g} \uparrow\uparrow \overrightarrow{h} \\ &= mg \cdot (h_i - h_f) = mgh_i - mgh_f \\ &= E_{pot\,i} - E_{pot\,f} = -\Delta E_{pot} \end{aligned}$$

où le déplacement h est décomposé en une différence de hauteur $h_i - h_f$.

On remarque que ce travail se compose de deux parties. Chacune d'elle ne dépend que du lieu où elle est évaluée et de la masse de l'objet. On peut donc appeler chacun de ces termes "énergie potentielle" à la hauteur considérée. Ainsi, le travail se traduit par une différence d'énergie potentielle. Et sa définition prend la forme suivante :

$$\boxed{E_{pot} = m \cdot g \cdot h} \tag{8.2}$$

8.3.3 Énergie cinétique

Quand on travaille pour augmenter la vitesse d'un corps, on produit de l'énergie cinétique.

Pour déterminer la valeur de celle-ci lorsque le corps de masse m passe d'une vitesse v_o à une vitesse v, il faut donc calculer le travail pour réaliser cette transformation. On a :

$$\begin{aligned} A &= \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d} = F \cdot d && \text{car } \overrightarrow{F} \uparrow\uparrow \overrightarrow{d} \\ &= ma \cdot d && \text{car } F = m \cdot a \\ &= m \cdot \frac{v^2 - v_o^2}{2 \cdot d} \cdot d && \text{pour un MRUA} \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_o^2 \\ &= E_{cin} - E_{cin\,o} = \Delta E_{cin} \end{aligned}$$

On remarque que ce travail se compose de deux parties. Chacune d'elle ne dépend que de la vitesse à l'instant considéré et de la masse de l'objet. On peut donc appeler chacun de ces termes "énergie cinétique" pour la vitesse considérée. Ainsi, le travail se traduit par une différence d'énergie cinétique. Et sa définition prend la forme suivante :

$$\boxed{E_{cin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2} \tag{8.3}$$

8.3.4 Énergie mécanique

Définissons encore la somme des énergie cinétique et potentielle comme l'énergie mécanique d'une masse m :

$$E_{méc} = E_{cin} + E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h \tag{8.4}$$

Celle-ci nous sera utile par la suite.

8.3.5 Exemple

Déterminez l'énergie mécanique d'une masse de 3 kg qui se trouve à un instant donné à une hauteur de 4 m et se déplace alors à une vitesse de 5 m/s.

Solution :

$$E_{méc} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 9,81 \cdot 4 = 155,22\,\text{J}$$

Bien entendu, on remarque que l'unité de l'énergie est la même que celle du travail, puisque le travail est une différence d'énergie. On a donc :

$$[E_{méc}] = [E_{cin}] = [E_{pot}] = J$$

8.4 Conservation de l'énergie

8.4.1 Introduction

La notion de conservation est fondamentale en physique. La première grandeur qui pourrait être conservée à laquelle on pense est la masse. Malheureusement, on sait aujourd'hui qu'elle ne l'est pas. Par contre, l'énergie l'est. Nous allons voir dans ce chapitre ce que cela signifie en étudiant le cas de la conservation de l'énergie mécanique. Nous verrons que selon les cas, celle-ci peut aussi ne pas être conservée.

8.4.2 Théorème de conservation de l'énergie mécanique

L'idée est née de la situation suivante : une masse tombe d'une certaine hauteur ; lorsqu'on la lâche celle-ci ne possède que de l'énergie potentielle ; en descendant, cette énergie diminue et en même temps, comme la vitesse augmente, son énergie cinétique augmente ; arrivée en bas, la masse n'a plus que de l'énergie cinétique. Tout s'est donc passé comme si l'énergie potentielle s'était transformée en énergie cinétique. Ainsi, on peut dire que

l'énergie mécanique, somme d'énergie potentielle et cinétique, est en fait restée constante tout au long de la chute.

Techniquement, on exprime cela de la manière suivante :

$$E_{mec} = const. \tag{8.5}$$

Ce qui signifie aussi :

$$E_{mec\,2} = E_{mec\,1} \Rightarrow \tag{8.6}$$
$$E_{mec\,2} - E_{mec\,1} = 0 \tag{8.7}$$
$$\Delta E_{mec} = 0 \tag{8.8}$$
$$ou \tag{8.9}$$
$$E_{cin\,2} + E_{pot\,2} - (E_{cin\,1} + E_{pot\,1}) = 0 \tag{8.10}$$
$$E_{cin\,2} - E_{cin\,1} + E_{pot\,2} - E_{pot\,1} = 0 \tag{8.11}$$
$$\Delta E_{cin} + \Delta E_{pot} = 0 \tag{8.12}$$
$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_2 - mgh_1 = 0 \tag{8.13}$$

Toutes ces expressions sont équivalentes. Il est important de bien comprendre que celles-ci signifient que l'énergie mécanique reste la même au cours du temps.

Il est aussi important de dire que que cette loi n'est valable qu'en l'absence de frottements. Nous reviendrons par la suite sur cette remarque.

8.4.3 Exemples

1. Un homme saute du plongeoir des 10 m. A quelle vitesse arrive-t-il dans l'eau ?
   Solution :
   En l'absence de frottements, l'énergie mécanique est conservé. Avant de commencer, il est nécessaire de fixer le zéro de l'altitude : on le choisi au niveau de l'eau. Ainsi, on peut évaluer l'énergie mécanique à 10 m et celle au niveau de l'eau. On a :

$$\begin{aligned} E_{mec\,10m} &= E_{cin\,10m} + E_{pot\,10m} \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot 0^2 + m \cdot g \cdot 10 \\ &= 100 \cdot m \ (g \cong 10\, m/s^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{mec\,eau} &= E_{cin\,eau} + E_{pot\,eau} \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot 0 \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \end{aligned}$$

   Ainsi, le théorème implique :

$$\begin{aligned} E_{mec\,eau} - E_{mec\,10m} &= 0 \\ \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - 100 \cdot m &= 0 \\ v &= \sqrt{200} \\ &= 14\, m/s \end{aligned}$$

   Pour une hauteur h quelconque, le même calcul mène à :

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

   Remarque :
   Bien évidemment, on retrouve cette même expression en utilisant la cinématique. En effet, pour un MRUA, on a :

$$v^2 = v_o^2 + 2 \cdot a \cdot d$$

   Pour un objet lâché en chute libre, on a : $a = g$, $d = h$ et $v_o = 0\, m/s^2$. Ainsi, on peut écrire :

$$v^2 = 0 + 2 \cdot g \cdot h$$

   Ce qui mène à la relation trouvée précédemment.
2. Quelle est la hauteur atteinte par un objet qu'on lance verticalement avec une vitesse de 3 m/s ?
   Solution :
   On place le zéro de l'axe au niveau du point de décollage et on l'oriente vers le haut. On peut ainsi déterminer l'énergie mécanique en ce point par :

$$E_{mec\,bas} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Car l'énergie potentielle pour h = 0 est nulle. D'autre part, au niveau le plus haut atteint par l'objet, sa vitesse étant nulle, l'énergie mécanique vaut :

$$E_{mec\,haut} = m \cdot g \cdot h$$

La conservation de l'énergie implique alors :

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h \Rightarrow$$
$$h = \frac{v^2}{2 \cdot g} \Rightarrow$$
$$h = \frac{3^2}{2 \cdot 10} = 0,45\,m$$

8.5 Limite du théorème de conservation

L'idée de conservation de l'énergie implique l'idée de récupérer l'énergie qu'on a donné. Ainsi, quand on augmente l'énergie potentielle d'une masse en la montant, on peut récupérer cette énergie en la laissant redescendre. La possibilité de récupérer l'énergie dépensée est en réalité une propriété de certaines forces dites conservatives. Ce n'est que pour ce type de forces que l'on peut définir la notion d'énergie potentielle. C'est le cas pour le poids, qui est une force conservative, pour laquelle on peut définir une énergie potentielle par $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$. Or, toutes les forces ne sont pas conservatives. Pour celles qui ne le sont pas, on ne peut définir d'énergie potentielle. C'est le cas pour la force de frottement par exemple, pour laquelle on ne peut définir d'énergie potentielle.

Ainsi, le théorème de conservation de l'énergie mécanique n'est valable qu'en présence de forces conservatives. Car, dans ce cas, toutes ces forces peuvent être représentées par une énergie potentielle et on peut écrire :

$$\Delta E_{mec} = 0$$

En réalité, en présence de forces non conservatives, on modifie le théorème de la manière suivante :

$$\Delta E_{mec} = A_{forces\,non\,conservatives} \quad (8.14)$$

Reste à donner les conditions qui rendent une force conservative.

8.6 Forces conservatives

8.6.1 Définition

Une force est dite conservative si et seulement si son travail sur un parcours fermé est nul. Cela se traduit mathématiquement par :

$$Force\,conservative \Leftrightarrow \oint \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = 0 \quad (8.15)$$

Le rond sur l'intégrale signifie que le parcours est fermé.

Une autre manière de définir une force conservative est de dire que son travail ne dépend pas du chemin choisi pour passer d'un point A à un point B. Autrement dit ce travail ne dépend que des points A et B.

8.6.2 Exemples

Le poids

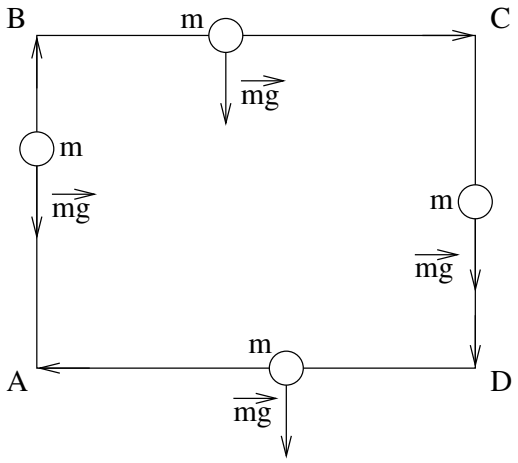
Un excellent exemple de force conservative est celui du poids. Pour s'en rendre compte, calculons le travail de cette force sur un parcours fermé : on monte une masse m sur une hauteur h, puis on la déplace horizontalement sur une distance d, on la redescend de h et on la ramène au départ (voir figure 8.6).

Le calcul du travail se fait alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A_{A-B} &= \oint \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_A^A \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} \\ &= \int_A^B \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} + \int_B^C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} + \\ &\quad \int_C^D \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} + \int_D^A \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} \\ &= -mg \cdot d_{AB} + 0 + mg \cdot d_{CD} + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

car, sur le segment AB le poids est parallèle, mais de sens opposé, au déplacement, ce qui introduit un signe négatif (sin(180°) = -1), sur le segment BC le poids est perpendiculaire au déplacement, ce

Figure 8.6 – *Travail du poids*



qui annule le travail ($\sin(90°) = 0$), sur le segment CD le poids est parallèle et de même sens que le déplacement et celui-ci est identique en grandeur à celui du segment AB et sur le segment DA le poids est perpendiculaire au déplacement ce qui annule aussi le travail. Ainsi, le travail total est nul et la force est bien conservative.

On peut aussi voir cela en calculant le travail du poids pour passer d'un point A à un point B :

$$\begin{aligned} A_{A-B} &= \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_A^B \vec{mg} \cdot \vec{dr} \\ &= \vec{mg} \cdot \int_A^B \vec{dr} = \vec{mg} \cdot \vec{AB} \\ &= \vec{mg} \cdot (\vec{B} - \vec{A}) = \vec{mg} \cdot \vec{B} - \vec{mg} \cdot \vec{A} \end{aligned}$$

Ainsi, on constate que le travail ne dépend que des points A et B. La force est donc conservative.

Le ressort

Un autre exemple intéressant de force conservative est celui de la force du ressort dans la limite élastique. Rappelons la forme de cette force :

$$F_{res} = -k \cdot x$$

où x est l'élongation du ressort par rapport à sa position de repos et où le signe négatif signifie qu'on a une force de rappel.

Pour montrer que cette force est conservative, il suffit de calculer le travail de cette force sur un parcours fermé, soit d'un point A à un point B suivi d'un retour en A. Cela peut s'écrire :

$$\begin{aligned} A &= \oint -k \cdot x \cdot dx \\ &= \int_A^B -k \cdot x \cdot dx + \int_B^A -k \cdot x \cdot dx \\ &= \int_A^B -k \cdot x \cdot dx - \int_A^B -k \cdot x \cdot dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Naturellement, en raison des propriétés de l'intégrale, la démonstration est évidente.

Comme la force du ressort est conservative, elle dérive d'un potentiel. Déterminons-en l'énergie en calculant plus précisément le travail de A à B :

$$\begin{aligned} A &= \int_A^B -k \cdot x \cdot dx \\ &= -k \cdot \int_A^B x \cdot dx = -k \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2|_A^B \\ &= -\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2|_A^B = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x_A^2 - x_B^2) \end{aligned}$$

ou :

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \cdot k \cdot x_B^2 - (-\frac{1}{2} \cdot k \cdot x_A^2) \\ &= -(\frac{1}{2} \cdot k \cdot x_B^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_A^2) \end{aligned}$$

On voit clairement que le travail ne dépend que des points A et B et que l'énergie potentielle en ces points prend la forme :

$$\boxed{E_{pot\,res} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2} \qquad (8.16)$$

Ce qui permet de ré-écrire le travail en fonction de l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} A &= -(\frac{1}{2} \cdot k \cdot x_B^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_A^2) \\ &= -(E_{pot\,res}(B) - E_{pot\,res}(A)) \\ &= -\Delta E_{pot\,res} \end{aligned}$$

8.6.3 Généralisation

La dernière relation met en évidence une relation fondamentale entre une force conservative et

son énergie potentielle. En effet, on peut écrire par définition du travail :

$$A = F \cdot \Delta x = -\Delta E_{pot} \;\Rightarrow\; F = -\frac{\Delta E_{pot}}{\Delta x}$$

Ce qui se traduit en langage infinitésimal par :

$$F = -\frac{d}{dx} E_{pot} \tag{8.17}$$

On dira donc que la force dérive au signe près de l'énergie potentielle. Attention, la dérivée porte sur la variable d'espace et non le temps.

On peut aussi écrire inversement :

$$\Delta E_{pot} = -A = -\int_A^B F \cdot dx \tag{8.18}$$

ou même, vectoriellement :

$$\Delta E_{pot} = -A = -\int_A^B \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{ds} \tag{8.19}$$

Cette équation permettant de déterminer par intégration l'énergie potentielle liée à un expression algébrique quelconque de la force, on peut l'utiliser pour la force issue de la loi de la gravitation universelle de Newton.

Énergie gravifique

Considérons donc l'expression de la force de gravitation :

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \tag{8.20}$$

Il s'agit d'une force centrale, c'est-à-dire qui pointe toujours vers un point central. Le travail, comme projection du vecteur déplacement infinitésimal $\Delta\overrightarrow{r}$ sur le vecteur force $\overrightarrow{F}$, peut donc être étudié selon une droite radiale passant pas le point central. Mathématiquement, on a donc :

$$\begin{aligned}
A &= \int_A^B \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_A^B F \cdot dr \\
&= \int_A^B G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot dr = G \cdot M \cdot m \cdot \int_A^B \frac{dr}{r^2} \\
&= G \cdot M \cdot m \cdot \int_A^B r^{-2} \cdot dr \\
&= G \cdot M \cdot m \cdot (-r^{-1})|_A^B \\
&= -G \cdot M \cdot m \cdot (\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}) \\
&= -(G \cdot \frac{M \cdot m}{r_B} - G \cdot \frac{M \cdot m}{r_A})
\end{aligned}$$

Ce qui permet comme précédemment de ré-écrire le travail en fonction de l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned}
A &= -(G \cdot \frac{M \cdot m}{r_B} - G \cdot \frac{M \cdot m}{r_A}) \\
&= -(E_{pot\,grav}(B) - E_{pot\,grav}(A)) \\
&= -\Delta E_{pot\,grav}
\end{aligned}$$

On voit clairement que le travail ne dépend que des points A et B. Mais, contrairement à la forme de l'énergie potentielle issue du poids ou celle correspondant à la force d'un ressort, pour lesquelles le zéro de l'énergie correspond à l'origine de l'axe, on voit ici qu'à une distance nulle l'énergie devient infinie.

Se pose donc le problème du choix du zéro de l'énergie potentielle. Pour les deux forces évoquées ci-dessus, il semble évident pour la première qu'en remontant le champ de gravitation, l'énergie potentielle augmente et pour la seconde qu'elle le fait en s'éloignant de la position de repos du ressort.

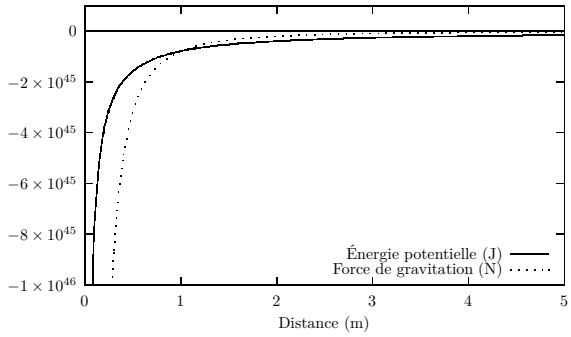
Pour la force de gravitation, la forme de l'énergie potentielle implique qu'elle ne peut être nulle qu'à l'infini. Pour que celle-ci augmente en fonction de la distance, elle ne peut être positive. On doit donc choisir la forme suivante :

$$E_{pot\,grav} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r} \tag{8.21}$$

Ainsi, l'énergie potentielle augmente, c'est-à-dire devient de moins en moins négative, en s'éloignant de l'origine et s'annule à l'infini.

Considérons la force de gravitation donnée par l'équation 8.20 et l'énergie potentielle correspondante donne par l'équation 8.21 d'un point de vue

Figure 8.7 – *Force et énergie potentielle de gravitation entre la Terre et le Soleil*



graphique. La force de gravitation a été affectée d'un signe négatif pour signifier qu'elle est attractive et s'exerce dans le sens contraire de l'axe. Elle est inversement proportionnelle au carré de la distance, alors que l'énergie potentielle est elle inversement proportionnelle à la distance. Le graphe 8.7 résente la force et l'énergie potentielle de la Terre dans le champ de gravitation du Soleil.

L'étude des propriété de la fonction d'énergie potentielle sera un élément très important pour comprendre les mouvements des objets soumis à différentes force.

Plus généralement, nous reconsidérerons ce problème au chapitre 9.

Chapitre 9

Physique théorique

9.1 Introduction

Ce chapitre constitue une introduction à la physique théorique. Il présente la notion fondamentale d'action sous la forme la plus simple possible. Il s'inspire des idées de l'excellent ouvrage *Le minimum théorique* de Susskind et Hrabovsky (2017). Le formalisme développé dans ces ouvrage est clairement inaccessible ici. C'est pourquoi, un effort important a été fait pour s'en dégager et rester au niveau de mathématiques simples. Si le formalisme mathématique vous intéresse, reportez-vous à cet ouvrage.

Le tableau 8.1, page 119, présente la notion d'énergie comme située au niveau de la vitesse, soit « une intégration » au-dessus de l'accélération. La relation fondamentale de la dynamique, soit la seconde loi de Newton, se situant au niveau de l'accélération, déterminer la vitesse se fait mathématiquement par intégration. Par contre, avec l'énergie, une relation directe plus « physique » à la vitesse est possible.

Dans ce chapitre, on va montrer que la notion d'énergie se trouve au sein d'un principe fondamental qu'on peut voir comme générateur des équations du mouvement, le *principe de moindre action*.

Pour le comprendre, il faut revenir sur les deux formes d'énergie potentielle et cinétique.

9.2 Énergie potentielle

Il s'agit d'un concept fondamental au même titre que l'énergie cinétique.

> Le principe de base - qu'on appelle le *principe de l'énergie potentielle* - déclare que toutes les forces proviennent d'une fonction d'énergie potentielle notée V(x). (Susskind et Hrabovsky, 2017, p. 106)

Les équations 8.17 et 8.18, page 126 traduisent mathématiquement ce principe :

$$F = -\frac{d}{dx}E_{pot} \tag{9.1}$$

Et inversement :

$$\boxed{\Delta E_{pot} = -A = -\int_A^B F \cdot dx} \tag{9.2}$$

Évidemment, la relation est différentielle ou intégrale puisqu'on passe du niveau de l'accélération à celui de la vitesse.

9.3 Énergie cinétique

Rappelons aussi la notion d'énergie cinétique :

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \tag{9.3}$$

qui va donner lieu au *théorème de l'énergie cinétique*.

9.4 Quantité de mouvement

Enfin, rappelons aussi celle de quantité de mouvement et sa conservation exprimée par l'équation 6.17, page 98 :

$$\boxed{\overrightarrow{p} = constante} \tag{9.4}$$

9.5 Conservation de l'énergie

Il est intéressant de considérer le théorème de conservation de l'énergie mécanique donné par l'équation 8.5, page 8.5 :

$$\boxed{E_{mec} = const.} \tag{9.5}$$

Avec la définition de l'énergie mécanique :

$$E_{méc} = E_{cin} + E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h \tag{9.6}$$

on peut montrer que celui-ci implique la seconde loi de Newton. En effet, si conservation de l'énergie il y a, c'est que sa dérivée s'annule. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_{mec} &= \frac{d}{dt}(E_{cin} + E_{pot}) \\
&= \frac{d}{dt}(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + E_{pot}) \\
&= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{d}{dt}v^2 + \frac{d}{dt}E_{pot} \\
&= \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot v \cdot \frac{d}{dt}v + \frac{d}{dx}\frac{dx}{dt}E_{pot} \\
&= m \cdot v \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{dx}{dt}\frac{d}{dx}E_{pot} \\
&= m \cdot v \cdot a + v \cdot (-\frac{d}{dx}\int_A^B F \cdot dx) \\
&= v \cdot (m \cdot a - F) = 0 \Rightarrow \\
F &= m \cdot a
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

9.6 Principe de moindre action

La physique newtonienne n'est pas la relativité. La question est de savoir s'il existe une ou des équations générales permettant de traiter ces domaines et d'autres encore de la même manière.

Une grandeur et un principe très général existent en effet. Il s'agit de l'*action lagrangienne* et de sa minimalisation.

Trois éléments sont donc à considérer : Le lagrangien, son action et sa minimalisation.

9.6.1 Lagrangien

Le lagrangien est une grandeur à la fois évidente est étonnante. On part des grandeurs connues d'énergie cinétique et potentielle. Cela paraît normal que la mécanique nécessite ces grandeurs. Mais on construit le lagrangien L à l'inverse de l'énergie mécanique, soit par une différence de ces deux grandeurs :

$$L = E_{cim} - E_{pot} \tag{9.7}$$

La raison de cette différence tient dans l'obtention de la seconde loi de Newton, comme nous le verrons par la suite.

9.6.2 Action

Nous sommes ici au cœur de cette introduction à la physique théorique. On va voir que l'action et sa minimalisation constituent un principe très général permettant d'obtenir les équations de Newton du mouvement. Pourquoi alors ajouter une couche d'abstraction à celles-ci, alors qu'elles suffisent à décrire le comportement des objets classiques ?

C'est que si la mécanique classique est bien décrite par les équations de Newton, la mécanique quantique et la relativité ne reposent pas sur celles-ci. Par contre, dans tous ces domaines, la minimalisation de l'action reste parfaitement valable et permet d'en obtenir les équations fondamentales.

> « *L'action se présente comme la sommation, le long du parcours du système, de la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. La détermination du trajet se fait par une méthode variationnelle : à points extremum fixés, temps de trajet fixé, et trajet variable, on cherche le ou les trajets pour lesquels l'action est stationnaire par rapport aux variations possibles et infimes du trajet.* » [a]

Pratiquement, on évalue le lagrangien pour chaque petit intervalle de temps et on en effectue la somme sur tout le trajet. Soit :

$$\boxed{A = \int_{t_0}^{t_1} (\frac{1}{2}m \cdot v^2 - V)dt} \tag{9.8}$$

a. Voir Wikipedia : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Principe_de_moindre_action_et_mÃĭcanique_classique`

Comme le lagrangien est la différence entre les énergies cinétique et potentielle, cela revient à évaluer la somme des variation de ces énergies sur le parcourt.

9.6.3 Minimalisation

Chaque parcourt ne va pas transférer son énergie cinétique en énergie potentielle et vice-versa de la même manière. Certains trajets auront des variations instantanées plus petites que d'autres. Au final, ce sera le chemin dont les variations instantanées seront minimales qui deviendra réalité.

> « *En mécanique, le principe de moindre action affirme qu'un corps prend la direction qui lui permet de dépenser le moins d'énergie dans l'immédiat (ou d'acquérir le plus d'énergie dans l'immédiat), en tenant compte qu'il doit y avoir continuité du mouvement (positions et vitesses) s'il y a continuité des conditions physiques.*
>
> *En reliant deux points, la trajectoire prise par le corps n'est pas toujours celle qui lui fait dépenser globalement le moins d'énergie car c'est la dépense immédiate (ou plutôt instantanée) d'énergie qui est minimisée (comme si le corps ne percevait que les conditions de son environnement immédiat) et si le chemin parcouru est long, un chemin plus court avec une dépense d'énergie immédiate plus élevée peut permettre une dépense globale inférieure. Une analogie avec la consommation en carburant d'une voiture peut être faite.*
>
> *Dans ce « résumé », « énergie » signifie énergie cinétique, et une « dépense d'énergie » signifie que de l'énergie cinétique se transforme en énergie potentielle.* » [51]
>
> « *On peut interpréter cela comme équivalent aux deux conditions suivantes :*
> — *la trajectoire que suit un corps est celle qui permet la transformation instantanée de l'énergie cinétique en énergie potentielle la plus petite possible (donc aussi la plus lente sur la trajectoire), ou la transformation immédiate dans le sens inverse la plus grande possible (donc la plus rapide possible sur la trajectoire) ;*
> — *la transformation (et donc la trajectoire) est déterminée par les conditions initiales (position et vitesse) et les conditions de l'environnement physique : il doit y avoir continuité de la trajectoire s'il y a continuité du milieu physique.*
>
> *Il y a parfois un échange cyclique entre ces deux énergies (balancier sans frottement, satellite à orbite elliptique...) ou une stabilisation provisoire (bille immobile ou posée au fond d'un trou, satellite à orbite circulaire...).*
>
> *La chute libre d'un corps est l'exemple type de la transformation de l'énergie potentielle (gravitationnelle) en énergie cinétique. Le ralentissement et l'arrêt (avant sa chute) d'un corps lancé verticalement est un exemple de la transformation inverse.*
>
> *Les frottements imposent une transformation plus compliquée car ils engendrent de la chaleur, qui est l'énergie cinétique des molécules des matériaux, mais en négligeant cette forme d'énergie, on peut utiliser le Principe de moindre action en considérant que de l'énergie cinétique se perd (sort du système étudié).* »[52]

Ainsi le principe de moindre action se réalise-t-il et il s'écrit pratiquement :

$$\partial A = 0 \tag{9.9}$$

Mathématiquement cela signifie que toutes les variations sont minimalisées sur l'ensemble de la trajectoire. Il s'agit d'une opération mathématique généralement complexe que nous n'allons envisager ici qu'en une seule dimension pour éviter des différenciations partielles.

9.7 Euler-Lagrange

> « *Cette méthode aboutit aux équations d'Euler-Lagrange qui donnent des trajets sur lesquels l'action n'est pas toujours minimale, mais parfois maximale, voire ni*

l'un ni l'autre mais seulement stationnaire. Dans tous les cas ces trajets respectent les conditions physiques et sont donc réalistes. Mais le long de chacun de ces trajets, si deux points sont assez proches (mesure faite par la longueur du trajet les séparant) alors on peut démontrer qu'entre eux ce trajet minimise l'action dans la méthode variationnelle, ce qui justifie le nom du principe. »[53]

Pour obtenir les équations d'Euler-Lagrange, il faut partir du principe de moindre action :

$$\begin{aligned}\partial A &= \partial\left(\int_{t_0}^{t_1}(\frac{1}{2}m\cdot v^2 - V)\cdot dt\right)\\ &= \partial\int_{t_0}^{t_1} L\cdot dt = \partial\int_{t_0}^{t_1} L(t,x,v(t))\cdot dt\end{aligned}$$

Comme le lagrangien contient non seulement la variable t, mais x(t) et la vitesse v dérivée de x(t), minimiser celui-ci n'est pas simple. Le lagrangien est ce qu'on appelle une fonctionnelle et on peut montrer que sa minimisation produit les équations d'Euler-Lagrange qui s'expriment en une dimension par :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0} \tag{9.10}$$

Cette équation est fondamentale, mais elle n'est pas évidente. Pour tenter de la comprendre, nous allons l'appliquer dans des cas très simples.

Chapitre 10

Thermodynamique

10.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de parcourir quelques notions et domaines simples de la thermodynamique. Température et chaleur seront abordées avec l'objectif d'étudier la transmission de chaleur à travers divers matériaux de construction pour la maison. On verra aussi le principe de fonctionnement de quelques moteurs thermiques.

10.2 Température

La notion de température n'est pas facile. Même si chacun la conçoit aisément, elle fait référence à ce qui est froid et ce qui est chaud et par là à la notion de chaleur. Mais température et chaleur sont deux choses différentes qu'il faut bien distinguer. Nous allons nous intéresser aux deux. Commençons par la température.

10.2.1 Celsius

L'une des manières d'établir une mesure de température consiste à utiliser deux température clairement définies et à diviser l'intervalle qu'elles délimitent. Pour des raisons que nous verrons par la suite, la température de fusion de la glace et celle de vaporisation de l'eau sont relativement faciles à mesurer. Elles ont donc tout naturellement été choisies pour définir le *degré centigrade* ou *degré Celsius*, abrégé par °C. Un intervalle de 100 °C a été choisi entre ces deux mesures. Ainsi, dans cette unité, la glace fond à 0 °C et l'eau devient de la vapeur à 100 °C.

$$\text{Fusion de la glace} \longleftrightarrow 0\,^\circ\text{C}$$
$$\text{Vaporisation de l'eau} \longleftrightarrow 100\,^\circ\text{C}$$

10.2.2 Fahrenheit

Une autre échelle, comportant 180 °F entre la fusion de la glace et la vaporisation de l'eau, pose une température de 32 °F à la fusion. Cette échelle est dite de Fahrenheit. On a donc :

$$\text{Fusion de la glace} \longleftrightarrow 32\,^\circ\text{F}$$
$$\text{Vaporisation de l'eau} \longleftrightarrow 212\,^\circ\text{F}$$

Cela montre que non seulement la définition du zéro de la température mais aussi celle de l'unité de température sont arbitraire.

Il existe bien entendu une correspondance entre les deux échelles qui est donnée par :

$$T_F = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$$

En effet, à la température $T_C = 0\,^\circ\text{C}$ correspond une température $T_F = 32\,^\circ\text{F}$. De plus comme à un intervalle de température de 100 °C correspond 180 °F, le rapport d'intervalle de température est de $180/100 = 9/5$.

Les deux échelles de Celsius et de Fahrenheit reposent donc sur deux états particuliers de la matière. En réalité, il s'agit de transitions d'état. Pour la fusion de la glace, c'est la transformation de la glace en eau et pour la vaporisation, la transformation de l'eau en vapeur. Nous verrons par la suite que lors de ces changements d'état la température reste particulièrement constante.

10.2.3 Kelvin

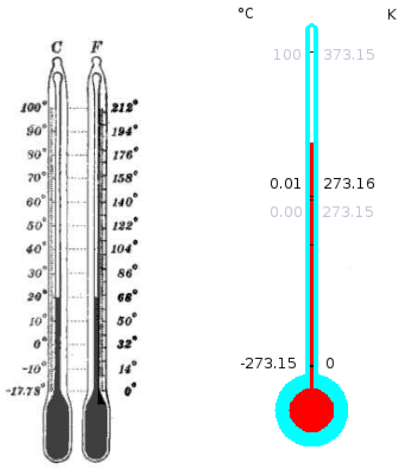
L'unité de température du système international est le Kelvin dont le symbole est K. Il s'agit d'une unité basée sur la notion d'agitation moléculaire. Nous verrons dans le paragraphe suivant que la température est une mesure de l'agitation moléculaire. Celle-ci correspond elle-même à l'énergie cinétique moyenne des molécules. On peut donc imaginer une échelle de température dont le zéro corresponde à une agitation moléculaire nulle (pour autant que cela soit envisageable), c'est-à-dire à une énergie cinétique nulle. Cette échelle est celle du Kelvin. Son zéro, théorique, se situe à $-273{,}15\,°C$ et à un intervalle de température de 1 K correspond 1 °C. Ainsi, 20 °C correspondent à une température de 293,15 K.

10.2.4 Agitation moléculaire

Une manière étonnante de s'imaginer le monde qui nous entoure est de le considérer sous sa forme moléculaire. De notre point de vue macroscopique, tous les objets qui font partie de notre environnement sont solides et immobiles. Or, la température est intimement liés au mouvement des molécules ou autres atomes. Plus précisément, la température est une mesure de l'énergie cinétique moyenne des molécules ou atomes d'une matière. Pour un gaz comme l'air, par exemple, le lien entre l'énergie cinétique moyenne des molécules E_{cin} et la température T, exprimée en K, est obtenue grâce à la théorie cinétique des gaz parfaits et donnée par l'intermédiaire de la constante de Boltzmann $k = 1{,}381 \cdot 10^{-23}\,J/K$:

$$\begin{aligned} E_{cin} &= \frac{3}{2} \cdot k \cdot T \;\Rightarrow \\ \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 &= \frac{3}{2} \cdot k \cdot T \;\Rightarrow \\ v &= \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m}} \end{aligned} \tag{10.1}$$

Il est donc possible de calculer la vitesse de translation moyenne des molécules d'air en connaissant leur masse. Or, comme l'air est composé essentiellement de molécules d'azote N_2 (à 76%) et d'oxygène O_2 (à 23%) dont les masse molaires sont respectivement de 28 g/mol et 32 g/mol, la masse de la molécule d'azote est de 28 uma et celle d'oxygène de 32 uma. L'unité de masse atomique ayant



(a) Fahrenheit (b) Kelvin

Figure 10.1 – *Les échelles de température*[54]

pour valeur : 1 uma=$1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg, la masse d'une molécule d'azote est de $4{,}648 \cdot 10^{-26}$ kg et celle de la molécule d'oxygène de $5{,}312 \cdot 10^{-26}$ kg. On peut ainsi se faire une idée de la vitesse moyenne des deux types de molécules dans de l'air à 20 °C, c'est à dire comme nous l'avons vu ci-dessus à 293,15 K, à l'aide de l'équation 10.1 :

$$v_{N_2} = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot 293{,}15}{4{,}648 \cdot 10^{-26}}} = 511\,m/s = 1840\,km/h$$

$$v_{O_2} = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot 293{,}15}{5{,}312 \cdot 10^{-26}}} = 478\,m/s = 1721\,km/h$$

Ces vitesses sont considérables. L'image microscopique de notre environnement est donc plutôt celle d'un ensemble de molécules et d'atomes se déplaçant à grande vitesse sur de courtes distances que celle du monde immobile tel que nous le voyons à échelle macroscopique.

10.3 Dilatation

La mesure de la température est pratiquement liée à celle de la dilatation de liquides comme l'alcool ou le mercure. En effet, c'est par l'intermédiaire de thermomètres utilisant un liquide qui se dilate dans un tube qu'on réalise, encore de nos jours, cette mesure.

Matière	Cœfficient 1/K
Aluminium	$23{,}1 \cdot 10^{-6}$
Béton	$10 \cdot 10^{-6}$
Cuivre	$16{,}6 \cdot 10^{-6}$
Fer	$12 \cdot 10^{-6}$
Verre	$68 \cdot 10^{-6}$

Table 10.1 – *Cœfficient de dilatation linéaire*

Pour une matière solide ou liquide de longueur initiale L_0 soumise à une différence de température $\Delta\theta$, sa dilatation linéaire ΔL obéit à la loi phénoménologique suivante :

$$\boxed{\Delta L = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta} \tag{10.2}$$

où α est le cœfficient de dilatation linéaire de la matière en question. Ses unités sont :

$$[\alpha] = \frac{[\Delta L]}{[L_0] \cdot [\Delta\theta]} = 1/^\circ\text{C} = 1/\text{K}$$

On trouve dans la table 10.1 différents cœfficient de dilatation linéaires.

Un exemple intéressant de dilatation linéaire est donnée par la détermination de l'espace entre chaque rail d'une voie de chemin de fer. La longueur d'un rail étant de 5 m environ et sa matière du fer, on peut calculer cet espace pour une variation de température de 50 °C par :

$$\Delta L = 5 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 3\,\text{mm}$$

Remarquons que le calcul donne la dilatation totale du rail. Il ne faut pas compter 3 mm de chaque côté du rail. La dilatation est comptée d'un seul côté, l'autre étant considéré comme fixe.

10.4 Chaleur

La chaleur est une notion souvent associée à la température. Il faut pourtant clairement les distinguer. Pour le comprendre, étudions les chaleurs spécifique et latente.

10.4.1 Chaleur spécifique

La chaleur spécifique c d'une matière est l'énergie Q qu'il faut fournir à 1 kg de celle-ci pour en élever la température de 1 °C. En d'autres termes, on a :

$$c = \frac{Q}{m \cdot \Delta\theta}$$

Autrement dit, pour élever la température d'un corps d'une masse m d'une température $\Delta\theta$, il faut lui fournir une quantité de chaleur Q donnée par :

$$\boxed{Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta} \tag{10.3}$$

Prenons comme exemple une masse de 2 kg de glace dont on veut élever la température de −10 °C à −5 °C. Quelle est la chaleur nécessaire ?

On trouve la chaleur spécifique de la glace dans la table 10.2.

Table 10.2 – *Chaleur spécifique*

Matière	c J °C/kg
Alcool	$2{,}46 \cdot 10^3$
Eau	$4{,}18 \cdot 10^3$
Glace	$2{,}06 \cdot 10^3$
Glycérine	$2{,}4 \cdot 10^3$
Mercure	$0{,}14 \cdot 10^3$

Celle-ci nous permet de calculer la chaleur nécessaire par l'équation :

$$Q = 2 \cdot 2{,}06 \cdot 10^3 \cdot (-5 - (-10)) = 20\,600\,\text{J}$$

On voit que la chaleur nécessaire est positive. Cela signifie qu'on doit en fournir à la glace.

Comme autre exemple, considérons qu'on fournit 10 000 J à 3 kg d'eau à une température de 20 °C. On peut alors calculer la température à laquelle elle parvient après chauffage par :

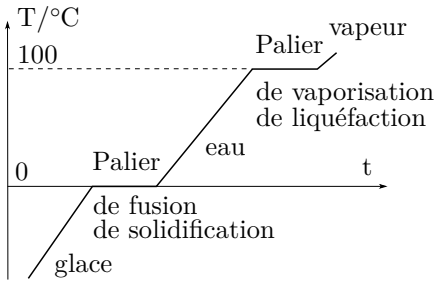
$$\begin{aligned} Q &= m \cdot c_{eau} \cdot (T_f - T_i) \;\Rightarrow \\ T_f &= \frac{Q}{m \cdot c_{eau}} + T_i \\ &= \frac{10'000}{3 \cdot 4{,}18 \cdot 10^3} + 20 = 20{,}8\,^\circ\text{C} \end{aligned}$$

10.4.2 Chaleur latente

Il arrive parfois qu'en fournissant de la chaleur à un corps on n'élève pas sa température. C'est le cas pour la glace qui se trouve à 0 °C. Alors, ce corps

se transforme, il change d'état. Pour la glace, elle fond. L'eau passe de l'état solide à l'état liquide. De manière générale, lors de transition d'état, la température ne varie pas. Par exemple, quand de l'eau passe de l'état liquide à l'état gazeux, une transition d'état qu'on appelle *vaporisation*, sa température ne change pas. Temporellement, quand on chauffe de la glace à une température inférieure à 0 °C, celle-ci augmente progressivement jusqu'à 0 °C, puis s'arrête le temps que toute la glace devienne de l'eau, puis la température de l'eau augmente progressivement jusqu'à 100 °C, s'arrête le temps que toute l'eau devienne de la vapeur dont la température continue alors d'augmenter. L'élévation de température au cours du temps prend donc la forme présentés sur le graphe de la figure 10.2.

Figure 10.2 – *Changements d'états*



On y distingue des paliers pendant lesquels la température reste constante. Il s'agit du *palier de fusion* de la glace ou du *palier de solidification* de l'eau et du *palier de vaporisation* de l'eau ou du *palier de liquéfaction* de la vapeur.

Notons que ce sont ces paliers qui ont servi à définir l'échelle de température de Celsius.

La chaleur latente L nécessaire à faire passer un kilogramme d'une matière donnée d'un état à l'autre est donnée par la *chaleur latente*. Elle s'exprime par :

$$L = \frac{Q}{m}$$

Autrement dit, pour changer l'état d'un corps d'une masse m, il faut lui fournir une quantité de chaleur Q donnée par :

$$\boxed{Q = m \cdot L} \tag{10.4}$$

Évidemment, la chaleur latente est différente pour chaque transformation d'état. On trouve dans le tableau 10.3 les chaleur latentes de quelques matières pour chaque changement d'état. Les chaleurs latentes sont données positivement. Elles correspondent donc à un changement d'état qui nécessite un apport de chaleur au système pour se réaliser. Pour le changement d'état inverse, il suffit d'affecter à la chaleur latente un signe négatif. Pour l'eau, par exemple, la chaleur latente de fusion est de $3{,}3 \cdot 10^5$ J/kg. La chaleur latente de solidification est donc de $-3{,}3 \cdot 10^5$ J/kg.

Table 10.3 – *Chaleur latente*

Matière	L_{fusion} J/kg	$L_{vaporisation}$ J/kg
Eau	$3{,}3 \cdot 10^5$	$23 \cdot 10^5$
Mercure	$0{,}11 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$
Oxygène	$0{,}14 \cdot 10^5$	$2{,}13 \cdot 10^5$

Par exemple, on peut calculer la chaleur nécessaire à transformer 3 kg de glace en eau ainsi :

$$Q = m \cdot L_f = 3 \cdot 3{,}3 \cdot 10^5 = 990\,000\,\text{J}$$

De la même manière, en fournissant une chaleur de 100 000 J à de l'eau à 100 °C, la quantité d'eau qui va passer de l'état liquide à l'état gazeux est donnée par :

$$Q = m \cdot L_v \;\Rightarrow\; m = \frac{Q}{L_v}$$

$$m = \frac{100'000}{23 \cdot 10^5} = 0{,}0435\,\text{kg} = 43{,}5\,\text{g}$$

10.5 Énergie thermique

Il s'agit ici de présenter ici le plus simplement possible la relation qui existe entre les concepts de travail, d'énergie interne et de chaleur. Nous avons déjà vu ce qu'est le travail. L'énergie interne est constituée, quant à elle, de la somme des énergie potentielles et cinétiques d'un corps constitué de plusieurs éléments. L'énergie potentielle représente ici l'énergie liée aux forces qui s'exercent entre les éléments du corps et l'énergie cinétique est celle qui est liée à l'agitation de ces éléments dont une bonne mesure est donnée par la température. La chaleur quant à elle s'entend comme de l'énergie qui transite d'un corps à l'autre.

Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796-1832)

Nicolas Léonard Sadi Carnot ne publia qu'un seul livre, œuvre de sa vie : *"Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance"* (Paris, 1824).
Il est l'un des fondateurs de la thermodynamique, science des phénomènes thermiques. Il développa l'idée d'un moteur idéal d'un rendement maximum indépassable. Il est en effet impossible de transformer intégralement la chaleur provenant d'une source chaude fournie à un moteur thermique en travail mécanique. Nécessairement, un partie de cette chaleur est rejetée vers une source froide.
Il ébaucha la première loi de la thermodynamique en tentant de trouver un lien entre travail et chaleur.
Évidemment, une révolution motrice fut engagée avec Carnot et les machines à vapeur, révolution qui fut à l'origine de la société thermo-industrielle.

Nicolas Léonard Sadi Carnot en uniforme de polytechnicien peint par Louis Léopold Boilly, tiré de Wikipedia[55]

Les gaz ont des propriétés étonnantes qui en permettent une utilisation particulièrement adaptée au moteurs thermiques. Sans donner ici la loi des gaz parfaits qui traduit ces propriétés, on peut présenter rapidement le *premier principe* de la thermodynamique qui règle le fonctionnement de ces moteurs.

10.5.1 Premier principe

Lorsqu'on chauffe un gaz contenu dans un récipient muni d'un piston, la chaleur Q transférée à ce gaz peut produire deux effets : une augmentation de son énergie interne ΔU, c'est-à-dire de sa température et/ou une variation de son volume impliquant un travail A du piston.

Le premier principe de la thermodynamique dit en effet que :

$$\boxed{Q = \Delta U + A} \tag{10.5}$$

Ce principe est à la base de la construction de moteurs thermiques auxquels on fournit de la chaleur Q pour la transformer en partie en travail mécanique A. Mais cela dépasse le cadre de cette partie d'introduction à la thermodynamique.

Résumé des grandeurs et unités

Grandeur	**Définition**	**Unité**
Température	T	°C, K, °F
Cœf. dilatation	α	1/°C
Chaleur	Q	J
Chaleur spécifique	c	J K/kg
Chaleur latente	L_o	J/kg
Énergie interne	U	J
Travail	A	J

Résumé des relations concernant la thermodynamique

Définition des grandeurs et **Relations particulières**

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L_o \cdot \Delta\theta} \qquad (10.6)$$

$$c = \frac{Q}{m \cdot \Delta\theta} \qquad (10.7)$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T \qquad (10.8)$$

Lois

$$\Delta L = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta \qquad (10.9)$$

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta \qquad (10.10)$$

$$Q = \Delta U + A \qquad (10.11)$$

Figure 10.3 – *Résumé de thermodynamique*

Chapitre 11

Thermodynamique

11.1 Température et dilatation

11.1.1 Température

La notion de température n'est pas facile à cerner sans avoir recours à un modèle atomique de la matière. En effet, celle-ci est liée à l'agitation des molécules et plus particulièrement à leur énergie cinétique. Nous verrons par la suite au paragraphe 11.6 une définition statistique de la température qui précisera cette remarque. Provisoirement, on peut définir deux échelles de température.

La première se base sur la stabilité constatée expérimentalement du palier de fusion de la glace et du palier d'ébullition de l'eau. Elle est dite de Celsius et attribue la température de 0 °C (zéro degré Celsius) à la température de la glace fondante et la température de 100 °C à la température de l'eau en ébullition. Ces deux points fixes permettent alors de définir une échelle linéaire comportant des nombres négatifs.

La seconde se base sur l'énergie cinétique des molécules. Elle est dite de Kelvin ou échelle de température absolue et fait correspondre la température de 0 K (zéro Kelvin) à un état où les molécules sont supposées être totalement figées. On y reviendra au paragraphe 11.6. Cette température peut être définie en °C et vaut −273,15 °C. Ainsi

$$0\,\mathrm{K} = -273{,}15\,^{\circ}\mathrm{C}$$

La définition du zéro absolu est loin d'être évidente. En réalité, la définition même d'une échelle de température l'est aussi. Car, pour des thermomètres basés sur la dilatation des solides (voir paragraphe 11.1.2), comme pour ceux basés sur la dilatation des liquides (thermomètres au mercure, par exemple), la proportionnalité de l'allongement avec la température n'est pas garantie.

Paradoxalement, car la maîtrise théorique nécessaire à l'utilisation d'un tel thermomètre ne le laisse pas penser, c'est avec des thermomètres à gaz que les meilleurs résultats sont obtenus. En effet, pour certains gaz particuliers dits parfaits, la variation de volume est parfaitement proportionnelle à la température, pour autant que la pression reste constante. Le principe de fonctionnement d'un thermomètre à gaz est donc le suivant : on maintient constante la pression exercée sur un gaz par l'intermédiaire d'un tube en U rempli de mercure dont on peut abaisser ou monter l'une des branches pour rééquilibrer le niveau de mercure après dilatation du gaz. La différence de hauteur mesurée permet alors d'obtenir la température.

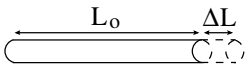
11.1.2 Dilatation

Un corps solide soumis à un changement de température voit ses dimensions changer. Considérons d'abord le cas d'un corps étendu dans une seule dimension. Une tige mince par exemple. On constate expérimentalement (voir figure 11.1) que la variation de sa longueur ΔL est proportionnelle à sa longueur initiale L_o, à la variation de température $\Delta\theta$ qu'il subit et à un coefficient α traduisant la réaction de la matière qui le constitue au changement

de température. On a ainsi :

$$\boxed{\Delta L = L_o \cdot \alpha \cdot \Delta\theta} \tag{11.1}$$

Figure 11.1 – *Dilatation linéaire*



Les unités du coefficient de dilatation linéaire α s'expriment donc par des 1/°C ou des 1/K. Ce coefficient est donc fonction de la matière utilisée. La table 11.1 en donne différentes valeurs pour différentes matières :

Table 11.1 – *Coefficient de dilatation linéaire*

Matière	α 1/K
Acier	$11 \cdot 10^{-6}$
Béton	$10 \cdot 10^{-6}$
Cuivre	$16{,}6 \cdot 10^{-6}$
Fer	$12 \cdot 10^{-6}$
Or	$14{,}2 \cdot 10^{-6}$
Plomb	$29 \cdot 10^{-6}$
Verre (acrylique)	$68 \cdot 10^{-6}$

Pour fixer les idées, considérons l'exemple suivant :

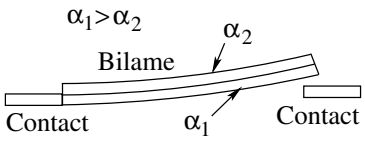
Une tige de cuivre s'allonge de 5 mm sous l'effet d'une élévation de température $\Delta\theta = 60\,°\text{C}$. Quelle était sa longueur avant élongation ?

Réponse :

$$\begin{aligned} \Delta L = L_o \cdot \alpha \cdot \Delta\theta \Rightarrow \\ L_o &= \frac{\Delta L}{\alpha \cdot \Delta\theta} \\ &= \frac{5 \cdot 10^{-3}}{16{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 60} = 5{,}02\,\text{m} \end{aligned}$$

Un exemple classique d'utilisation de la dilatation des métaux est celui du fusible bilame. On colle ensemble deux lames métalliques de matière différentes, donc de coefficient de dilatation différents. Lors du passage d'un courant électrique dans ces lames, celles-ci chauffent. Chaque lame se dilate différemment. Celle qui s'allonge le plus force l'autre à se courber. Le bilame se plie donc de telle manière à ce que la matière de coefficient de dilatation le plus important se trouve à l'extérieur d'un arc de cercle, comme indiqué sur la figure 11.2.

Figure 11.2 – *Fusible bilame*



Cette courbure force l'une des extrémités à couper le circuit. Le fusible remplit ainsi son office.

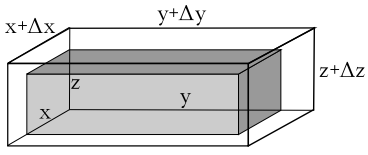
Ce principe s'applique aussi à la construction de thermomètres. En effet, on peut utiliser le déplacement de l'extrémité d'un bilame pour déplacer une aiguille autour de son axe de rotation.

Le cas général d'un solide étendu dans plusieurs direction est plus complexe. Il s'agit de la dilatation d'un volume. Une relation similaire à celle du cas linéaire peut être exprimée entre l'augmentation de volume ΔV, de température $\Delta\theta$, le volume initial V_o et un coefficient de dilatation volumique γ caractérisant la réaction de la matière au changement de température :

$$\boxed{\Delta V = V_o \cdot \gamma \cdot \Delta\theta} \tag{11.2}$$

Le coefficient de dilatation volumique γ a les mêmes unités que le coefficient de dilatation linéaire α. Évidemment, il existe une relation intime entre eux. En effet, on peut comprendre l'augmentation de volume comme une augmentation de longueur dans trois directions perpendiculaires, comme le montre la figure 11.3.

Figure 11.3 – *Dilatation volumique*



Cette dilatation volumique se calcule alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} V_o + \Delta V = (x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) \cdot (z + \Delta z) = \\ x \cdot y + x \cdot \Delta y + \Delta x \cdot y + \Delta x \cdot \Delta y = \\ x \cdot y + x \cdot (y \cdot \alpha \cdot \Delta\theta) + (x \cdot \alpha\Delta\theta) \cdot y \\ +(x \cdot \alpha\Delta\theta)(y \cdot \alpha\Delta\theta) = \\ (xy + 2 \cdot xy\alpha\Delta\theta + xy\alpha^2\Delta\theta^2) \cdot (z + z\alpha\Delta\theta) = \\ xyz + xyz \cdot 3\alpha\Delta\theta \\ +xyz \cdot 3\alpha^2\Delta\theta^2 + xyz\alpha^3\Delta\theta^3 = \\ V_o + V_o \cdot 3\alpha\Delta\theta + V_o \cdot 3\alpha^2\Delta\theta^2 + V_o\alpha^3\Delta\theta^3 \end{aligned}$$

On voit alors que l'expression de ΔV est complexe. Cependant, si on considère un coefficient α petit et pour une variation de température $\Delta\theta$ relativement petite, on peut négliger les termes d'ordre supérieur à un comme α^2 et α^3. On a alors l'expression suivante pour ΔV :

$$\Delta V \cong V_o \cdot 3\alpha\Delta\theta$$

et on retrouve bien l'expression 11.2 en posant :

$$\gamma = 3 \cdot \alpha \tag{11.3}$$

Bien entendu, il s'agit d'une approximation.

La table 11.2 donne quelques coefficients de dilatation volumique γ :

Table 11.2 – *Coefficient de dilatation volumique*

Matière	γ 1/K
Alcool	$11 \cdot 10^{-4}$
Eau	$2 \cdot 10^{-4}$
Huile	$7 \cdot 10^{-4}$
Mercure	$7 \cdot 10^{-4}$

Considérons l'exemple suivant :

Une piscine de $10\,\mathrm{m} \times 5\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$ est remplie d'eau. Si on suppose que la matière du récipient qui la constitue ne se dilate pas, calculez le volume d'eau qui déborde de celle-ci quand elle est entièrement remplie à 17 °C et que sa température s'élève à 25 °C.

Réponse :

On commence par calculer le volume initial :

$$V_o = 10 \cdot 5 \cdot 2 = 100\,\mathrm{m}^2$$

Puis, on détermine la variation de volume :

$$\begin{aligned} \Delta V &= 100 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot (25 - 17) \\ &= 0{,}16\,\mathrm{m}^3 = 160\,\mathrm{dm}^3 = 160\,\mathrm{L} \end{aligned}$$

11.2 Chaleurs spécifique et latente

11.2.1 Introduction

Nous avons vu précédemment l'effet d'une élévation de température sur les dimensions d'un objet. Pour produire une telle élévation de température, il est nécessaire de fournir de l'énergie sous la forme de chaleur. La chaleur est donc l'énergie donnée à un corps froid par un corps chaud. En première approximation, cette énergie est transmise par contact des atomes agités du corps chaud aux atomes moins agités du corps froid.

11.2.2 Chaleur spécifique

La chaleur spécifique d'un corps est simplement l'énergie par unité de matière qu'il faut lui fournir pour élever sa température de un degré.

Chaleur massique

On peut définir la chaleur massique c d'un corps comme l'énergie par kilogramme qu'il faut lui fournir pour élever sa température d'un degré centigrade. Ainsi :

$$c = \frac{Q}{m \cdot \Delta\theta} \tag{11.4}$$

où Q est l'énergie ou la chaleur fournie pour élever la température d'un corps de masse m d'une valeur $\Delta\theta$. On peut donc aussi écrire :

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta \tag{11.5}$$

Selon l'équation 11.4, on peut écrire :

$$[c] = \mathrm{J\,°C/kg}$$

Et il faut remarquer finalement que de la chaleur Q que reçoit un corps est comptée positivement alors

que celle que ce corps fournit est comptée négativement. En effet, un corps qui voit sa température augmenter parce qu'on lui fournit de l'énergie, c'est-à-dire parce qu'il reçoit de la chaleur, a un $\Delta\theta > 0$. Ainsi, l'équation 11.5 présente un $Q > 0$. Par contre un corps qui voit sa température diminuer parce qu'on lui prend de l'énergie, c'est-à-dire parce qu'il donne de la chaleur, a un $\Delta\theta < 0$. Ainsi, l'équation 11.5 présente un $Q < 0$.

On trouve dans le tableau 11.3 différentes valeur de la chaleur massique c.

Table 11.3 – *Chaleur massique*

Matière	c J °C/kg
Alcool	$2{,}46 \cdot 10^3$
Eau	$4{,}18 \cdot 10^3$
Glace	$2{,}06 \cdot 10^3$
Glycérine	$2{,}4 \cdot 10^3$
Mercure	$0{,}14 \cdot 10^3$

On remarque que l'eau a une valeur de chaleur massique très élevée. C'est l'une des substance dont la chaleur massique est la plus élevée. Comme la masse des eaux océaniques représente environ deux cent septante fois celle de l'atmosphère, on imagine ainsi aisément le rôle de régulateur thermique des océans.

Capacité thermique

A partir de la chaleur massique on définit parfois la *capacité thermique* c_t d'une matière de masse m par :

$$c_t = m \cdot c$$

Ses unités sont donc :

$$[c_t] = \frac{J}{^\circ C}$$

Parfois ce n'est pas la capacité thermique qui est donnée, mais la *valeur en eau* m. Il s'agit de la masse d'eau dont la capacité thermique est équivalente à celle de la matière considérée. En d'autres termes :

$$m \cdot c_{eau} = c_t$$
$$m = \frac{c_t}{c_{eau}}$$

L'intérêt de cette notion est qu'on peut considérer la valeur en eau des récipients, par exemple, comme une simple adjonction d'eau à la masse du liquide qu'ils contiennent.

Notion de mole

La notion de mole peut sembler complexe. Il s'agit pourtant tout simplement de faire des paquets de matière. Mais pas n'importe comment. On choisit la masse de ces paquets égale, en gramme, à la masse atomique ou moléculaire de l'élément considéré en unité de masse atomique (uma). Ainsi, la masse d'une mole de carbone, C^{12}, vaut 12 g, la masse d'une mole d'oxygène, O_2^{16}, vaut 32 g et celle d'une mole d'aluminium, Al^{27}, vaut 27 g. Ainsi, clairement plus la masse atomique ou moléculaire est élevée, plus la masse d'une mole de l'élément correspondant l'est. On comprend donc que le nombre d'éléments (atomes ou molécules) compris dans une mole est le même pour chaque matière. Il s'agit d'une constante nommée *nombre d'Avogadro* N_A :

$$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}/\text{mol}$$

Celle-ci relie donc le nombre n de moles d'un gaz au nombre N de ses molécules :

$$N = n \cdot N_A \tag{11.6}$$

D'un autre côté, on peut dire que le problème tient dans la définition de la masse atomique[56]. Mais, cela relève d'une autre histoire ...

Chaleur molaire

On peut définir la chaleur molaire C d'un corps comme l'énergie par mole qu'il faut fournir pour élever sa température d'un degré centigrade. Ainsi :

$$C = \frac{Q}{n \cdot \Delta\theta} \tag{11.7}$$

où Q est l'énergie ou la chaleur fournie pour élever la température d'un corps de n moles d'une valeur $\Delta\theta$. On peut donc aussi écrire :

$$Q = n \cdot C \cdot \Delta\theta \tag{11.8}$$

Selon l'équation 11.7, on peut écrire :

$$[C] = \text{J °C/mol}$$

La même remarque qu'au paragraphe 11.2.2 concernant le signe de la chaleur Q est encore applicable ici.

Relation entre chaleur massique et molaire

Notons MM la masse moléculaire ou atomique d'un élément. Par définition de la notion de mole, la masse moléculaire est égale à la masse molaire. Notons donc aussi MM la masse molaire. Ainsi, la masse de n moles d'un élément est donné par :

$$m = n \cdot MM$$

A partir des relations 11.5 et 11.8, on peut écrire :

$$m \cdot c \cdot \Delta\theta = n \cdot C \cdot \Delta\theta$$

c'est-à-dire :

$$n \cdot MM \cdot c \cdot \Delta\theta = n \cdot C \cdot \Delta\theta$$

ce qui donne après simplification :

$$MM \cdot c = C$$

Chaleur latente

Lorsqu'on fournit de la chaleur à de l'eau, sa température augmente. Cependant cela n'est pas le cas lors d'une transformation de son état. L'eau peut en effet se présenter sous forme solide (la glace), liquide ou gazeuse (la vapeur d'eau). Il s'agit de trois états de l'eau qui manifestent une structure particulière de cette matière. L'eau peut ainsi changer d'état en passant de l'état solide à celui de liquide, par exemple. En fait, quatre cas de *transition d'état* existent. La *fusion* qui est une transition de l'état solide à liquide. La *solidification* qui est une transition de l'état liquide à solide. La *vaporisation* qui est une transition de l'état liquide à celui de vapeur. Et finalement, la *liquéfaction* qui est une transition de l'état de vapeur à celui de liquide.

Lors de chacune de ces transformations d'état la température reste stable. Pour la transition solide-liquide ou liquide-solide, la température vaut 0 °C. Pour la transition liquide-gaz ou gaz-liquide, dans des conditions normales de pression (1 atm), la température vaut 100 °C. Lors de chacune de ces transitions la matière voit son organisation moléculaire changer et la distance entre ses molécules se modifier.

On appelle *chaleur latente* L la chaleur nécessaire pour changer l'état de 1 kg de matière. Si Q est la chaleur fournie pour changer l'état d'une masse m de matière, on a :

$$L = \frac{Q}{m} \tag{11.9}$$

On a aussi :

$$[L] = \text{J/kg}$$

Si on considère que la chaleur reçue par la matière doit être comptée positivement et que celle qu'elle libère doit l'être négativement et qu'on note respectivement les chaleurs latentes de fusion-solidification et vaporisation-liquéfaction par L_f et L_v, on a :

Fusion	$Q = +m \cdot L_f$
Solidification	$Q = -m \cdot L_f$
Vaporisation	$Q = +m \cdot L_v$
Liquéfaction	$Q = -m \cdot L_v$

L'eau sous forme liquide est donc un réservoir d'énergie qu'il est possible d'utiliser pour atténuer le gel des plantes en les arrosant. Pendant la nuit, en effet, la baisse de température peut être limitée par le dégagement de la chaleur de l'eau liquide qui se solidifie.

Vous trouverez dans le tableau 11.4 différentes chaleur latentes pour différentes matières.

Table 11.4 – *Chaleur latente*

Matière	L_{fusion} J/kg	$L_{vaporisation}$ J/kg
Eau	$3{,}3 \cdot 10^5$	$23 \cdot 10^5$
Mercure	$0{,}11 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$
Oxygène	$0{,}14 \cdot 10^5$	$2{,}13 \cdot 10^5$

Évaporation

L'évaporation est une vaporisation qui se produit à toute température. On peut imaginer un liquide composé de molécules vibrant sous l'effet de la chaleur et maintenues ensemble par des forces intermoléculaires de cohésion. Les molécules de la surface du liquide étant moins entourées, elles sont moins liées au liquide. Les plus rapides peuvent donc en sortir. On parle alors d'*évaporation*. Évidemment,

plus le liquide est chaud, plus l'évaporation est importante. De plus, certaines molécules évaporées retournent au liquide. Tant que le nombre de molécules qui en sortent est supérieur à celles qui y retournent, il y a évaporation. Dès lors qu'autant de molécules sortent qu'il en rentre, il y a saturation et l'évaporation cesse. Comme le moment de la saturation dépend de la pression du gaz dans lequel s'évapore le liquide, le problème est complexe ... à traiter.

11.2.3 Bilan thermique

Lorsque plusieurs matières, ou états de la matière, à températures différentes sont placées au contact les unes des autres des échange de chaleurs se produisent qui aboutissent à une homogénéisation de la température. On parle alors d'équilibre thermique et de *température d'équilibre*. Pour autant qu'il n'y ait pas de pertes, le bilan des chaleurs échangées est nul. Ou, pour être plus précis, le bilan des chaleurs reçues et des chaleurs perdue est nul. Ainsi, on peut poser que la somme des chaleurs échangées par chaque matière m, ou état de la matière, est nulle :

$$\sum_{i=m} Q_i = 0 \tag{11.10}$$

Considérons maintenant les deux exemples suivants :

Un thermos d'un litre est remplis au deux tiers d'eau chaude à 80 °C. La température moyenne du thermos est alors de 60 °C. Si la capacité thermique du thermos vaut 0,4 °C, quelle doit être en grammes la masse d'eau froide à 0 °C qu'il faut mettre dans le thermos pour que la température d'équilibre s'établisse à 40 °C ? Est-ce possible ?

Réponse :

La chaleur prise par l'eau froide à 0 °C pour augmenter sa température jusqu'à 40 °C vaut :

$$\begin{aligned} Q_m &= m \cdot c_{eau} \cdot (\theta_{éq} - \theta_{froide}) \\ &= m \cdot 4,18 \cdot 10^3 \cdot (40 - 0) \\ &= 167'200 \cdot m \end{aligned}$$

La chaleur cédée par l'eau chaude à 90 °C vaut :

$$\begin{aligned} Q_{chaude} &= V_{chaude} \cdot \rho_{eau} \cdot c_{eau} \cdot (\theta_{éq} - \theta_{chaude}) \\ &= \frac{2}{3} \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 \cdot 4,18 \cdot 10^3 \cdot (40 - 80) \\ &= -111\ 466{,}66\,\text{J} \end{aligned}$$

Et la chaleur cédé par le thermos à 60 °C vaut :

$$\begin{aligned} Q_{thermos} &= c_{t\,thermos} \cdot (\theta_{éq} - \theta_{thermos}) \\ &= 0,4 \cdot (40 - 60) \\ &= -8\,\text{J} \end{aligned}$$

car seule la capacité thermique du thermos est donnée.

Ainsi, on peut faire le bilan :

$$\begin{aligned} Q_m + Q_{chaude} + Q_{thermos} &= 0 \\ 167'200 \cdot m - 111'466,66 - 8 &= 0 \\ m &= 0{,}666\,\text{kg} \end{aligned}$$

Soit en terme de volume : 0,666 L. Il n'est donc pas possible de mettre cette quantité d'eau dans le thermos puisqu'il ne reste qu'un tiers de litre.

L'exemple suivant est plus complexe, car il fait intervenir un changement d'état. Un récipient de capacité thermique négligeable contient un demi-litre d'eau à 10 °C. On y verse 200 g de glace à −20 °C. Quel est l'état d'équilibre final et quelle est sa température ?

Réponse :

Commençons par évaluer les chaleurs spécifiques et latentes en présence. Évaluons-les jusqu'à une éventuelle transition d'état, c'est à dire ici 0 °C. En effet, dans un premier temps, on ne peut deviner la température d'équilibre.
Tout d'abord, il y a l'eau à 10 °C :

$$Q_{eau} = 0,5 \cdot 4,18 \cdot 10^3 \cdot (0 - 10) = -20\ 900\,\text{J}$$

car la masse d'un demi-litre d'eau vaut 0,5 kgM.
Puis vient une éventuelle solidification de cette eau :

$$Q_{eau \to glace} = -0,5 \cdot 3,3 \cdot 10^5 = -165\ 000\,\text{J}$$

car l'eau perd alors de l'énergie.
Pour la glace, son réchauffement donne :

$$Q_{glace} = 0,2 \cdot 2,06 \cdot 10^3 \cdot (0 - (-20)) = 4240\,\text{J}$$

Avec son éventuelle fusion :

$$Q_{glace \to eau} = 0,2 \cdot 3,3 \cdot 10^5 = 66\ 000\,\text{J}$$

On peut maintenant comparer les valeurs en présence.
Pour faire fondre la glace, il faut 4240 J. On utilise pour cela une partie de la chaleur fournie par l'eau. Sur les $-20\ 900$ J qu'elle peut fournir, il en reste alors $-20'900 + 4240 = -16\ 660$ J. Restent alors en présence 200 g de glace à 0 °C et un demi-litre d'eau à une température donnée par :

$$-4240 = 0,5 \cdot 4,18 \cdot 10^3 \cdot (\theta - 10)$$
$$\theta = 7{,}97\,^\circ\text{C}$$

Comme il faut 66 000 J pour faire fondre la totalité de la glace, les $-16\ 660$ J n'y suffiront pas. Néanmoins, cette chaleur est utilisée pour fondre une partie de la glace. La proportion de glace fondue est dans le rapport :

$$r = \frac{16'660}{66'000} = 0,25 = 25\%$$

La quantité de glace qui va fondre est donc de 25% de la masse initiale, soit 50 g.

Ainsi, l'état final est un mélange de 550 g d'eau et de 150 g de glace, le tout à 0 °C.

Il faut relever que les échanges de chaleur sont dès lors arrêtés parce que la température est la même pour la glace et l'eau. Le système ayant atteint un équilibre tout s'arrête.

11.3 Loi des gaz parfaits

La physique des gaz est complexe en raison de la diversité des gaz et de leur interactions. Un type de gaz bien particulier va être étudié ici. Il s'agit du gaz parfait. Un gaz est dit parfait si :

1. ses molécules ou atomes sont si petits comparé au volume du récipient qui les contient qu'elles peuvent être considérée comme ponctuelles et
2. ses molécules ou atomes sont assez distants les uns des autres pour que les forces intermoléculaires soient négligeables. Les interactions entre les composants du gaz sont donc très localisées et entre ces chocs ceux-ci se déplacent librement.

11.3.1 Équation d'état

Pression

La pression d'un gaz est définie par la force F par unité de surface que ce gaz exerce sur une surface S donnée. Ainsi, on peut écrire :

$$\boxed{p = \frac{F}{S}} \tag{11.11}$$

où on a :

$$[p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{N}{m^2} := Pa\ ou\ Pascal$$

État d'un gaz parfait

L'état d'un gaz parfait peut être caractérisé par quatre grandeurs : sa pression p en Pa, son volume V en m^3, sa température T en K et son nombre de moles n.

On appelle *équation d'état* la relation mathématique qui lie ces grandeurs pour un état donné. Il existe une équation d'état des gaz parfaits. On l'appelle *loi des gaz parfaits*.

Approche intuitive

Pour trouver l'expression de cette équation des gaz parfaits, on se base sur quatre constatations :

Loi de Boyle-Mariotte A température constante, si le volume diminue, alors la pression augmente.

$$p \sim \frac{1}{V}$$

Loi de Charles A pression constante, si la température augmente, alors le volume augmente.

$$V \sim T$$

Loi de Gay-Lussac A volume constant, si la température augmente, alors la pression augmente.

$$p \sim T$$

A température et volume constant, si le nombre de molécules N augmente, alors la pression augmente.

$$p \sim N$$

On peut alors résumer ces comportements par la relation suivante :

$$p \cdot V \sim N \cdot T$$

ou, à l'aide d'une relation d'égalité :

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T \tag{11.12}$$

Cette équation constitue l'une des formes de la loi des gaz parfaits. Cependant, on peut l'exprimer aussi de deux autres manières. A l'aide de l'équation 11.6, on peut écrire :

$$p \cdot V = n \cdot N_A \cdot k \cdot T$$

Soit, en définissant la constante des gaz parfaits R par :

$$R = N_A \cdot k$$

on obtient la forme la plus connue de la loi des gaz parfaits :

$$\boxed{p \cdot V = n \cdot R \cdot T} \tag{11.13}$$

La comparaison des deux formes de l'équation des gaz parfaits permet aussi d'écrire la relation utile suivante :

$$n \cdot R = N \cdot k \tag{11.14}$$

Dans le cas où le nombre de moles n du gaz reste constant, on peut aussi écrire :

$$\frac{p \cdot V}{T} = n \cdot R = constante$$

Ce qui signifie que lorsque le gaz passe d'un état 1 à un état 2 en conservant son nombre de moles, on a :

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \tag{11.15}$$

Approche moléculaire

On va ici tenter de trouver une expression de la pression exercée par un gaz sur une paroi du récipient qui le contient. Considérons pour cela un récipient cubique de dimensions $L \times L \times L$ et supposons qu'il contienne N molécules. Pour calculer la pression exercée par le gaz sur l'une de ses parois, il faut déterminer la force exercée par le gaz sur celle-ci. Pour cela considérons l'une de ses molécules se dirigeant vers la paroi. Celle-ci va entrer en collision avec la paroi et lui communiquer une impulsion

$$I = F \cdot dt$$

Le temps pendant lequel cette impulsion agit est très court et pendant ce temps le déplacement de la molécule très petit. La définition de l'impulsion et la seconde loi de Newton sous forme de quantité de mouvement (voir paragraphe 6.7) impliquent :

$$\begin{aligned} F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow \\ I = F \cdot dt = dp \Rightarrow \\ I = \Delta p = p_f - p_i \end{aligned}$$

où p_i et p_f sont respectivement la quantité de mouvement de la molécule avant et après le choc. Comme le système est la molécule, F est la force (extérieure) exercée par la paroi sur la molécule. Si on choisi un axe perpendiculaire à la surface et dirigé vers l'intérieur du récipient, qu'on note v le module de la vitesse moyenne de la molécule avant et après le choc (supposé élastique) on a :

$$p_i = -m \cdot v \text{ et } p_f = m \cdot v$$

Ainsi, l'impulsion devient :

$$I = m \cdot v - (-m \cdot v) = 2 \cdot m \cdot v$$

Par ailleurs, si le temps pendant lequel le choc avec la paroi est très court, l'intervalle de temps entre deux chocs consécutifs de deux molécules différentes sur la paroi n'est lui pas négligeable. Ainsi, si l'impulsion communiquée par chaque molécule à la paroi a lieu pendant un intervalle de temps très court, la force moyenne exercée sur celle-ci correspond à l'impulsion de la molécule *pendant le temps séparant les chocs consécutifs* de deux molécules. Ce temps est celui mis par une molécule pour parcourir la distance moyenne séparant deux molécules se dirigeant vers la paroi. Or, statistiquement, le nombre des molécules se dirigeant vers l'une des parois du cube vaut $N/6$. La distance moyenne séparant chaque molécules est donc de :

$$\Delta x = \frac{L}{N/6}$$

Comme la vitesse moyenne des molécules (entre les chocs) est v, on peut écrire :

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{6 \cdot L}{N \cdot v}$$

On peut maintenant déterminer la force moyenne exercée sur la paroi. En effet, par définition de l'impulsion (voir paragraphe 6.7), on a :

$$F = \frac{I}{\Delta t} = \frac{2 \cdot m \cdot v}{6 \cdot L/N \cdot v} \tag{11.16}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot N \cdot (\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2) \cdot \frac{1}{L} \tag{11.17}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot N \cdot E_{cin} \cdot \frac{1}{L} \tag{11.18}$$

Enfin, on peut calculer la pression sur la paroi :

$$p = \frac{F}{S} = \frac{2}{3} \cdot N \cdot E_{cin} \cdot \frac{1}{L \cdot S}$$

Or, comme le volume $V = L \cdot S$, on a :

$$p = \frac{2}{3} \cdot N \cdot E_{cin} \cdot \frac{1}{V}$$

ou en multipliant par V :

$$p \cdot V = \frac{2}{3} \cdot N \cdot E_{cin}$$

L'approche intuitive nous ayant appris par ailleurs que (équation 11.12) :

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T$$

on peut écrire :

$$N \cdot k \cdot T = \frac{2}{3} \cdot N \cdot E_{cin}$$

Soit, finalement, une relation très importante liant température et énergie cinétique moyenne :

$$E_{cin} = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T \tag{11.19}$$

11.3.2 Gaz parfait

Les considérations qui précèdent mènent à la définition de la notion de gaz parfait.

Un gaz est dit *parfait* si :

1. Le nombre d'éléments contenu dans le volume de gaz considéré est très grand, chaque élément a une structure identique et leur répartition est homogène.
2. les interactions de ses éléments (atomes ou molécules) n'interviennent qu'au moment des chocs élastiques qui se produisent entre eux ou avec les parois du récipient. Cela signifie qu'aucune action à distance ne s'exerce durablement sur eux. En d'autres termes, aucun potentiel n'est présent qui pourrait donner une quelconque énergie potentielle aux particules entre les chocs.
3. les dimensions des particules sont très petites par rapport aux distances qui les séparent. Un gaz parfait est donc très dilué (et fortement compressible).

11.4 Premier principe

Contrairement à la loi des gaz parfaits qui est une équation d'état, c'est-à-dire une équation qui lie les grandeurs d'un gaz qui se trouve dans un état donné, le premier principe est une équation d'évolution. Il lie les transferts de chaleur et le travail d'un gaz à la variation de son énergie interne. Il règle les relations entre grandeurs qui sont au cœur de changements de l'état du gaz.

11.4.1 Chaleur

Il est ici nécessaire de se demander ce qu'est la chaleur. En particulier, on peut se demander si c'est quelque chose qui se trouve dans le gaz. Une sorte de fluide dont le gaz serait remplis. Si c'est le cas, le gaz aurait dans un état donné une quantité donné de ce fluide. Si c'est le cas aussi, en opérant une transformation sur le gaz le faisant passer d'un état thermodynamique A à un état B, on peut s'imaginer utiliser ou lui donner une certaine quantité de ce fluide. Ainsi, arrivé à l'état thermodynamique B le gaz aurait une quantité définie de ce fluide différente de la quantité contenue en lui à l'état A.

Pourtant, si on considère un gaz de volume V_i fermé par un piston libre de se déplacer. Le poids du piston détermine le volume initial du gaz.

On peut alors imaginer l'expérience suivante : ... expérience chauffage gaz et rupture membrane fine ... . Dans les deux cas, les états thermodynamiques initial et final sont identiques. Et pourtant, dans un cas une certaine quantité de chaleur a été fournie au gaz et dans l'autre rien ne lui a été fourni puisque le contenant est isolé. Ainsi deux états thermodynamiques identiques ne disposeraient pas finalement de la même quantité de chaleur. Celle-ci ne serait donc pas caractéristique de l'état du gaz. La chaleur serait donc dans le gaz, mais sans en être une propriété. Il faudrait dire alors que la chaleur n'est pas une grandeur caractéristique de l'état du gaz, c'est-à-dire pas une grandeur d'état. Mais, alors de quoi serait-elle faite ?

On conçoit aujourd'hui la chaleur non comme un propriété de l'état d'un gaz, mais comme un transfert d'énergie entre deux matières. A ce titre, la chaleur ne peut pas être stockée, elle est un mouvement, un déplacement de l'énergie.

11.4.2 Travail

La définition générale du travail est donnée par l'équation :

$$A = \int F \cdot dl \tag{11.20}$$

D'autre part, on a aussi, par définition de la pression :

$$p = \frac{F}{S} \;\Rightarrow\; F = p \cdot S \tag{11.21}$$

En reportant l'expression de la force F donnée par 11.21 dans 11.20, on a :

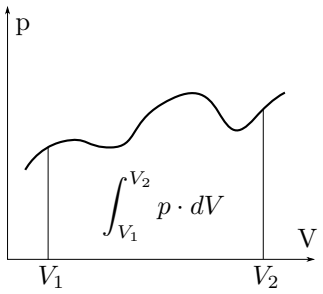
$$A = \int p \cdot S \cdot dl = \int p \cdot dV \tag{11.22}$$

car, $dV = S \cdot dl$.

Ainsi, on définira le travail en thermodynamique à l'aide de l'équation 11.22.

L'interprétation graphique du travail découle de l'intégrale de la fonction pression par rapport au volume. Il s'agit clairement de l'aire sous la courbe de la pression sur un diagramme P-V, comme le montre la figure 11.4.

Figure 11.4 – *Travail et diagramme P-V*



11.4.3 Énergie interne

Au paragraphe 11.3.1, on a obtenu une relation liant l'énergie cinétique moyenne d'une molécule ou d'un atome d'un gaz parfait à sa température. Il s'agit de l'équation 11.19 :

$$E_{cin} = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$$

Considérons un volume isolé thermiquement de l'extérieur. Cela signifie qu'on ne lui apporte pas de chaleur. Initialement remplis par un gaz parfait, supposons encore ce dernier confiné par une fine membrane dans la moitié du volume.

Pour un gaz parfait, l'énergie totale des molécules, ce qu'on peut appeler *l'énergie interne* du gaz et noter U, n'est constituée que de leur énergie cinétique. Ainsi, pour un gaz constitué de N éléments, on peut écrire à l'aide des équations 11.19 et 11.14 :

$$\begin{aligned} U = \sum_N E_{cin} &= N \cdot \frac{3}{2} \cdot k \cdot T \\ &= \frac{3}{2} \cdot N \cdot k \cdot T \\ &= \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T \end{aligned} \tag{11.23}$$

La relation 11.23 définit l'énergie interne d'un gaz parfait dont les éléments n'ont pour déplacement que des mouvements de translation. Pour des éléments ponctuels, l'énergie cinétique de rotation est négligeable face à celle de translation.

De manière générale, on définit l'énergie interne U d'un gaz par la somme de toutes les énergies cinétique et potentielles des éléments qui le constituent. Ainsi, on a :

$$U = \sum_N (E_{cin} + E_{pot})$$

Équipartition de l'énergie

Si on considère des éléments non ponctuels, dissymétriques, étendus, etc, il faut alors tenir compte des énergies cinétiques de rotation et de vibration. Comme l'équation 11.23 a été établie sur la base d'éléments ponctuels pour lesquels seule l'énergie de translation compte et qu'il apparaît un facteur 3/2 dans cette équation, on peut attribuer une énergie de :

$$E = \frac{1}{2} \cdot n \cdot R \cdot T \tag{11.24}$$

par possibilité indépendante de translation ou par axe de translation ou encore par ce qu'on nomme *degré de liberté*. Ainsi, on dira qu'un élément ponctuel, une particule monoatomique, a trois degré de liberté et qu'en conséquence son énergie interne vaut trois fois l'énergie donnée par 11.24, soit au total celle correspondant à 11.23.

Cela constitue le principe d'équipartition de l'énergie pour lequel on pose que l'énergie interne d'un gaz dont les éléments ont i degrés de liberté est :

$$E = \frac{i}{2} \cdot n \cdot R \cdot T \tag{11.25}$$

Pour des éléments qu'on ne peut considérer comme ponctuels, il faut tenir compte de leurs possibilités de rotations. Dans le cas diatomique, dont les atomes sont rigidement liés, deux axes de rotation sont à prendre en compte, le troisième passant par l'axe de la molécule n'impliquant pas une énergie supplémentaire puisque elle est négligeable. Ainsi, dans ce cas, il faut augmenter de deux le nombre de degrés de liberté de l'élément. En conséquence, en tenant compte des trois degrés de liberté de translation, son énergie interne devient :

$$E = \frac{5}{2} \cdot n \cdot R \cdot T \tag{11.26}$$

Dans le cas d'une molécule diatomique, dont les atomes vibrent l'un par rapport à l'autre, il faut considérer deux degrés de libertés supplémentaires. En effet, une énergie cinétique due au mouvement d'oscillation des deux atomes et une énergie potentielle due à la liaison électrique entre eux sont à prendre en compte. Ainsi, pour une molécule diatomique vibrant on a au total sept degrés de liberté et :

$$E = \frac{7}{2} \cdot n \cdot R \cdot T \tag{11.27}$$

Alors que pour une molécule triatomique rigide, on a trois degrés de liberté de translation et trois degrés de liberté de rotation. Soit au total six degrés de liberté et une énergie totale de :

$$E = \frac{6}{2} \cdot n \cdot R \cdot T \tag{11.28}$$

11.4.4 Premier principe

On peut maintenant énoncer le premier principe de la thermodynamique :

La chaleur reçue par le système se répartit entre la variation de son énergie interne et le travail qu'il fournit

En d'autres termes, plus mathématiques, on a :

$$Q = \Delta U + A \tag{11.29}$$

où :

— Q est la chaleur reçue par le système,
— ΔU est la variation de l'énergie interne et
— A est le travail fourni par le système.

En d'autres termes, un système qui reçoit de la chaleur réagit par une variation de son énergie interne et/ou par une production de travail.

11.4.5 Changements d'états

Nous avons déjà vu des changements d'état entre solide et liquides et entre liquides et gaz. En réalité, on devrait plutôt parler de transformation d'état pour réserver le terme de changement d'état à un changement des grandeurs qui caractérisent l'état d'un solide, d'un liquide ou d'un gaz. Par exemple, quand de la glace fond et devient de l'eau, on parle devrait parler de transformation de l'état de l'eau qui de glace devient de l'eau liquide. Par contre, quand on élève la température de l'eau en lui fournissant de la chaleur, on devrait parler de changement de l'état de l'eau, état défini au début par une température initiale et à la fin par une autre température. Dans la pratique, on considère ces deux termes comme synonymes et, par la suite, on utilisera indifféremment l'un ou l'autre.

Ainsi, pour un gaz, on parlera de changement d'état quand les grandeurs qui définissent l'état d'un gaz, selon par exemple la loi des gaz parfaits, changent. Ces grandeurs sont la pression, le

volume et la température. L'évolution de ces grandeurs lors d'un changement d'état peut être partiellement représenté graphiquement à l'aide de ce qu'on nomme un *diagramme P-V*. Il s'agit de la représentation graphique de la pression d'un gaz en fonction de son volume. Chaque point de ce diagramme constitue un état thermodynamique du gaz défini pour un gaz parfait par la loi des gaz parfaits. Un changement de l'état du gaz se traduit par un déplacement d'un point à un autre du diagramme. Sur la figure 11.10, page 155, on voit l'évolution d'un gaz entre quatre états thermodynamiques. Chaque courbe liant deux états traduisant l'évolution du gaz représente un changement d'état caractéristique comme on va le voir plus loin.

Transformation isobare

Une transformation isobare est une transformation qui se fait à pression constante.

La variation d'énergie interne s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta U = U_f - U_i &= \frac{i}{2}\cdot n\cdot R\cdot T_f - \frac{i}{2}\cdot n\cdot R\cdot T_i\\ &= \frac{i}{2}\cdot n\cdot R\cdot \Delta T\end{aligned}$$

ou à l'aide de la loi des gaz parfaits :

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{i}{2}\cdot n\cdot R\cdot \Delta T\\ &= \frac{i}{2}\cdot \Delta(n\cdot R\cdot T)\\ &= \frac{i}{2}\cdot \Delta(p\cdot V)\\ &= \frac{i}{2}\cdot p\cdot \Delta V\end{aligned}$$

Le travail du gaz s'écrit :

$$\begin{aligned}A &= \int_i^f p\cdot dV = p\cdot\int_i^f dV\\ &= p\cdot[V]_i^f = p\cdot(V_f - V_i) = p\cdot\Delta V\\ &= n\cdot R\cdot\Delta T\end{aligned}$$

puisque dans le cas d'un gaz parfait on peut écrire :

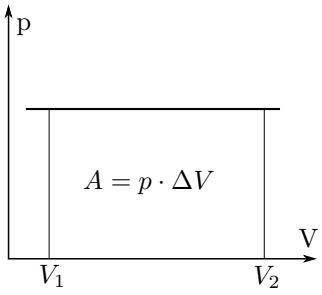
$$p\cdot\Delta V = n\cdot R\cdot\Delta T$$

Le premier principe donne alors :

$$\begin{aligned}Q = \Delta U + A &= \frac{i}{2}\cdot n\cdot R\cdot\Delta T + n\cdot R\cdot\Delta T\\ &= (\frac{i}{2}+1)\cdot n\cdot R\cdot\Delta T\end{aligned}$$

Comme la pression est constante, la représentation dans le diagramme P-V de ce changement d'état est une droite horizontale, comme donnée dans la figure 11.5.

Figure 11.5 – *Transformation isobare*



Cette transformation est donc caractérisée par :

Transformation isobare

$$\Delta U = \frac{i}{2}\cdot n\cdot R\cdot\Delta T \quad (11.30)$$

$$= \frac{i}{2}\cdot p\cdot\Delta V \quad (11.31)$$

$$A = n\cdot R\cdot\Delta T \quad (11.32)$$

$$Q = (\frac{i}{2}+1)\cdot n\cdot R\cdot\Delta T \quad (11.33)$$

Transformation isochore

Une transformation isochore est une transformation qui se fait à volume constant.

La variation d'énergie interne s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta U = U_f - U_i &= \frac{i}{2}\cdot n\cdot R\cdot T_f - \frac{i}{2}\cdot n\cdot R\cdot T_i\\ &= \frac{i}{2}\cdot n\cdot R\cdot\Delta T\end{aligned}$$

ou à l'aide de la loi des gaz parfaits :

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{i}{2}\cdot n\cdot R\cdot\Delta T\\ &= \frac{i}{2}\cdot\Delta(n\cdot R\cdot T)\\ &= \frac{i}{2}\cdot\Delta(p\cdot V)\end{aligned}$$

Comme le volume est constant, $dV = 0$ et le travail du gaz s'écrit :

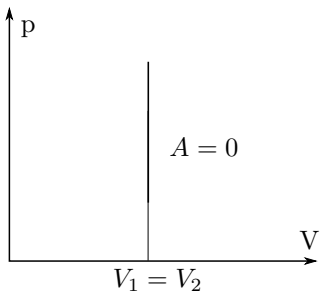
$$A = \int_i^f p \cdot dV = 0$$

Le premier principe donne alors :

$$Q = \Delta U + A = \frac{i}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T + 0 = \Delta U$$

Comme le volume est constant, la représentation dans le diagramme P-V de ce changement d'état est une droite verticale, comme donnée dans la figure 11.6.

Figure 11.6 – *Transformation isochore*



Cette transformation est donc caractérisée par :

Transformation isochore

$$\Delta U = \frac{i}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T \quad (11.34)$$
$$= \frac{i}{2} \cdot \Delta(p \cdot V) \quad (11.35)$$
$$A = 0 \quad (11.36)$$
$$Q = \Delta U \quad (11.37)$$

Transformation isotherme

Une transformation isotherme est une transformation qui se fait à température constante.

Comme la température est constante, $\Delta T = 0$ et la variation d'énergie interne s'écrit :

$$\Delta U = U_f - U_i = \frac{i}{2} \cdot n \cdot R \cdot T_f - \frac{i}{2} \cdot n \cdot R \cdot T_i$$
$$= \frac{i}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T = 0$$

À l'aide de l'équation des gaz parfaits, on peut écrire le travail du gaz :

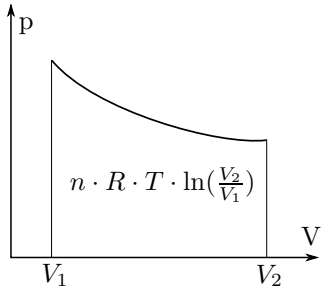
$$\begin{aligned} A = \int_i^f p \cdot dV &= \int_i^f \frac{n \cdot R \cdot T}{V} \cdot dV \\ &= n \cdot R \cdot T \cdot \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} \\ &= n \cdot R \cdot T \cdot [ln(V)]_{V_i}^{V_f} \\ &= n \cdot R \cdot T \cdot (ln(V_f) - ln(V_i)) \\ &= n \cdot R \cdot T \cdot ln(\frac{V_f}{V_i}) \end{aligned}$$

Le premier principe donne alors :

$$Q = \Delta U + A = 0 + n \cdot R \cdot T \cdot ln(\frac{V_f}{V_i}) = A$$

La représentation dans le diagramme P-V de ce changement d'état est celle donnée dans la figure 11.7.

Figure 11.7 – *Transformation isotherme*



Cette transformation est donc caractérisée par :

Transformation isotherme

$$\Delta U = 0 \quad (11.38)$$
$$A = n \cdot R \cdot T \cdot ln(\frac{V_f}{V_i}) \quad (11.39)$$
$$Q = A \quad (11.40)$$

Transformation adiabatique

Une transformation adiabatique est une transformation qui se fait sans échange de chaleur.

La variation d'énergie interne s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta U = U_f - U_i &= \frac{i}{2}\cdot n\cdot R\cdot T_f - \frac{i}{2}\cdot n\cdot R\cdot T_i \\ &= \frac{i}{2}\cdot n\cdot R\cdot \Delta T\end{aligned}$$

ou à l'aide de la loi des gaz parfaits :

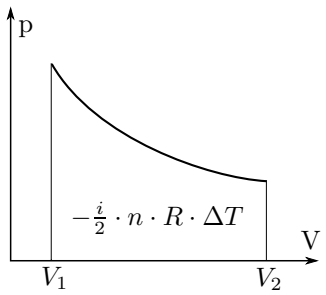
$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{i}{2}\cdot n\cdot R\cdot \Delta T \\ &= \frac{i}{2}\cdot \Delta(n\cdot R\cdot T) \\ &= \frac{i}{2}\cdot \Delta(p\cdot V)\end{aligned}$$

Le premier principe donne alors :

$$Q = 0 = \Delta U + A \;\Rightarrow\; A = -\Delta U$$

La représentation dans le diagramme P-V de ce changement d'état est celle donnée dans la figure 11.8.

Figure 11.8 – *Transformation adiabatique*



Cette transformation est donc caractérisée par :

$$\Delta U = \frac{i}{2}\cdot n\cdot R\cdot \Delta T \qquad (11.41)$$

$$= \frac{i}{2}\cdot \Delta(p\cdot V) \qquad (11.42)$$

$$A = -\Delta U \qquad (11.43)$$

$$Q = 0 \qquad (11.44)$$

Mais, en considérant les équation 11.43 et 11.42, on peut écrire pour une variation de volume dV :

$$A = -\Delta U \;\Rightarrow\; p\cdot dV = -\frac{i}{2}\cdot d(p\cdot V)$$

En divisant cette équation par $p\cdot V$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\frac{p\cdot dV}{p\cdot V} &= -\frac{i}{2}\cdot\frac{d(p\cdot V)}{p\cdot V} \;\Rightarrow \\ \frac{dV}{V} &= -\frac{i}{2}\cdot\frac{d(p\cdot V)}{(p\cdot V)}\end{aligned}$$

On peut alors intégrer cette équation :

$$\int\frac{dV}{V} = -\frac{i}{2}\cdot\int\frac{d(p\cdot V)}{(p\cdot V)}$$

En procédant par une intégration indéfinie et en regroupant toutes les constantes dans la partie droite de l'équation, on obtient :

$$\ln(V) = -\frac{i}{2}\cdot\ln(p\cdot V) + C$$

Ce qui donne encore grâce à l'exponentielle :

$$\begin{aligned}e^{\ln(V)} &= e^{-\frac{i}{2}\cdot\ln(p\cdot V)+C} \;\Rightarrow \\ V &= (e^{\ln(p\cdot V)})^{-\frac{i}{2}}\cdot e^C \\ &= (p\cdot V)^{-\frac{i}{2}}\cdot C'\end{aligned}$$

ou C' est une nouvelle constante. En regroupant les termes, puis en élevant à la puissance $2/i$:

$$\begin{aligned}V\cdot(p\cdot V)^{\frac{i}{2}} &= C' \;\Rightarrow \\ V^{\frac{2}{i}}\cdot p\cdot V &= C' \;\Rightarrow \\ p\cdot V^{\frac{2}{i}+1} &= C' \;\Rightarrow \\ p\cdot V^{\frac{i+2}{i}} &= C'\end{aligned}$$

Soit finalement, en posant :

$$\gamma = \frac{i+2}{i} \qquad (11.45)$$

une équation similaire à l'équation des gaz parfaits pour une transformation adiabatique :

Transformation adiabatique

$$p\cdot V^{\gamma} = constante \qquad (11.46)$$

Relevons que, pour un gaz parfait et une transformation adiabatique, les deux équations sont valables simultanément. Dans ce cas, on a donc :

$$\begin{aligned}\frac{p\cdot V}{T} = c' \;\text{ et }\; p\cdot V^{\gamma} = c'' \;&\Rightarrow \\ p = \frac{c'\cdot T}{V} \;\Rightarrow\; \frac{c'\cdot T}{V}\cdot V^{\gamma} = c'' \;&\Rightarrow \\ T\cdot V^{\gamma-1} = const \qquad (11.47)\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\frac{p \cdot V}{T} = c' \text{ et } p \cdot V^\gamma = c'' \Rightarrow$$
$$V = \frac{c' \cdot T}{p} \Rightarrow p \cdot (\frac{c' \cdot T}{p})^\gamma = c'' \Rightarrow$$
$$p^{1-\gamma} \cdot T^\gamma = const \quad (11.48)$$

D'autre part, on peut aussi calculer l'expression du travail pour la transformation adiabatique d'un gaz parfait à l'aide de l'équation 11.46 dans laquelle on a posé $c = const$:

$$\begin{aligned} A &= \int_{V_i}^{V_f} p \cdot dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{c}{V^\gamma} \cdot dV \\ &= c \cdot \int_{V_i}^{V_f} V^{-\gamma} \cdot dV = c \cdot [\frac{1}{-\gamma+1} \cdot V^{-\gamma+1}]_{V_i}^{V_f} \\ &= \frac{c}{1-\gamma} \cdot [V_f^{-\gamma+1} - V_i^{-\gamma+1}] \\ &= \frac{1}{1-\gamma} \cdot [c \cdot V_f^{-\gamma+1} - c \cdot V_i^{-\gamma+1}] \end{aligned}$$

soit, en considérant que :

$$p \cdot V^\gamma = p_i \cdot V_i^\gamma = p_f \cdot V_f^\gamma = c$$

et en remplaçant la constante c par l'une ou l'autre de ses valeurs :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1-\gamma} \cdot [c \cdot V_f^{-\gamma+1} - c \cdot V_i^{-\gamma+1}] \\ &= \frac{1}{1-\gamma} \cdot [p_f \cdot V_f^\gamma \cdot V_f^{-\gamma+1} - p_i \cdot V_i^\gamma \cdot V_i^{-\gamma+1}] \\ &= \frac{1}{1-\gamma} \cdot [p_f \cdot V_f - p_i \cdot V_i] = \frac{1}{\gamma-1} \cdot \Delta(p \cdot V) \end{aligned}$$

Et ainsi, finalement, on peut écrire le travail sous la forme :

$$A = \frac{1}{\gamma-1} \cdot \Delta(p \cdot V) \quad (11.49)$$

Enfin, on constate aussi que :

$$\frac{C_P}{C_V} = \frac{i/2+1}{i/2} = \frac{i+2}{i} = \gamma \quad (11.50)$$

Il faut donc ajouter aux équations 11.41 à 11.44 les équations 11.46, 11.47, 11.48, 11.49 et 11.50 :

Transformation adiabatique

$$\Delta U = \frac{i}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T \quad (11.51)$$
$$= \frac{i}{2} \cdot \Delta(p \cdot V) \quad (11.52)$$
$$A = -\Delta U = \frac{1}{\gamma-1} \cdot \Delta(p \cdot V) \quad (11.53)$$
$$Q = 0 \quad (11.54)$$
$$p \cdot V^\gamma = const \quad (11.55)$$
$$T \cdot V^{\gamma-1} = const \quad (11.56)$$
$$p^{1-\gamma} \cdot T^\gamma = const \quad (11.57)$$
$$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{C_P}{C_V} \quad (11.58)$$

11.4.6 Chaleurs spécifiques

Rappelons que la chaleur spécifique molaire est définie comme la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température d'une mole d'un gaz de un degré. Soit :

$$C = \frac{Q}{n \cdot \Delta\theta} \Rightarrow Q = n \cdot C \cdot \Delta\theta \quad (11.59)$$

Ainsi, pour une transformation isobare, l'équation 11.33 se présente sous la forme :

$$Q = (\frac{i}{2}+1) \cdot n \cdot R \cdot \Delta T = n \cdot C_p \cdot \Delta T$$

qui permet d'obtenir théoriquement la chaleur spécifique molaire C_p pour une transformation à pression constante :

$$C_p = (\frac{i}{2}+1) \cdot R = \frac{i+2}{2} \cdot R \quad (11.60)$$

De la même manière, pour une transformation isochore, les équation 11.37 et 11.35 mènent à :

$$Q = \frac{i}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T = n \cdot C_V \cdot \Delta T$$

qui permet d'obtenir théoriquement la chaleur spécifique molaire C_V pour une transformation à volume constant :

$$C_V = \frac{i}{2} \cdot R \quad (11.61)$$

Pour une transformation isotherme, comme la température ne varie pas, $\Delta T = 0$ et la chaleur spécifique est non définie.

Pour une transformation adiabatique, ce n'est pas la chaleur fournie au système qui fait varier la température. La chaleur spécifique est donc aussi indéfinie.

Par contre, on peut relever que le cœfficient γ de l'équation 11.46 peut s'écrire à l'aide des équations 11.60 et 11.61 :

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{(i+2)/2}{i/2} = \frac{C_p}{C_V} \tag{11.62}$$

11.5 Machines thermiques

11.5.1 Machine simple

Commençons par étudier une machine thermique très simple. Elle permettra de se rendre compte des principales caractéristiques de telles machines et de se familiariser avec l'analyse théorique qu'on peut leur appliquer.

La figure 11.9 présente la machine et les différentes étapes qu'elle parcourt. Le gaz qu'elle contient est supposé parfait et diatomique.

Figure 11.9(a) : étape A En premier lieu, on chauffe de manière à maintenir le volume constant pour permettre le chargement de la machine. La transformation est isochore.

Figure 11.9(b) : étape B En second lieu, on chauffe de manière à monter la masse. La pression est alors constante. La transformation est isobare.

Figure 11.9(c) : étape C Ensuite, on refroidit de manière à maintenir le volume constant pour permettre le déchargement de la machine. La transformation est isochore.

Figure 11.9(d) : étape D Enfin, on refroidit de manière à retourner à l'état initial. La pression est alors constante. La transformation est isobare.

L'une des propriétés naturelle d'un moteur thermique est qu'au bout de chaque cycle, le gaz doit se retrouver dans l'état initial. Cela est une contrainte importante qui implique, comme nous le verrons plus tard, que toute la chaleur fournie au moteur ne peut être convertie en travail mécanique. Cela signifie aussi que la variation de température sur un cycle entier est nulle. Comme l'énergie interne est proportionnelle à celle-ci, sur un cycle entier elle est aussi nulle.

État Unité	p bar	V m^3	T K
1	1	5	293,15
2	3,41	5	1000
3	3,41	12,5	2500
4	1	12,5	732,87

Table 11.5 – *États caractéristiques*

$$\Delta U_{\circlearrowleft} = n \cdot C_V \cdot \Delta\theta = 0 \tag{11.63}$$

Cela constitue une première possibilité de vérification de l'exactitude des calculs effectués sur le cycle.

Pour étudier de manière plus approfondie ce moteur thermique, considérons les grandeurs caractéristiques de chaque état données par le tableau 11.5.

Naturellement, les différentes grandeurs sont toutes compatibles avec la loi des gaz parfait. Pour le vérifier, on peut calculer le nombre de moles à l'aide de l'état 1. On a :

$$n = \frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T_1} = \frac{10^5 \cdot 5}{8,314 \cdot 293,15} = 205{,}15\,\text{mol}$$

La pression à l'état 2 est alors :

$$p_2 = \frac{n \cdot R \cdot T_2}{V_1} = \frac{205,15 \cdot 8,314 \cdot 1000}{5} = 3{,}41\,\text{bar}$$

et pour le volume de l'état 3, on a :

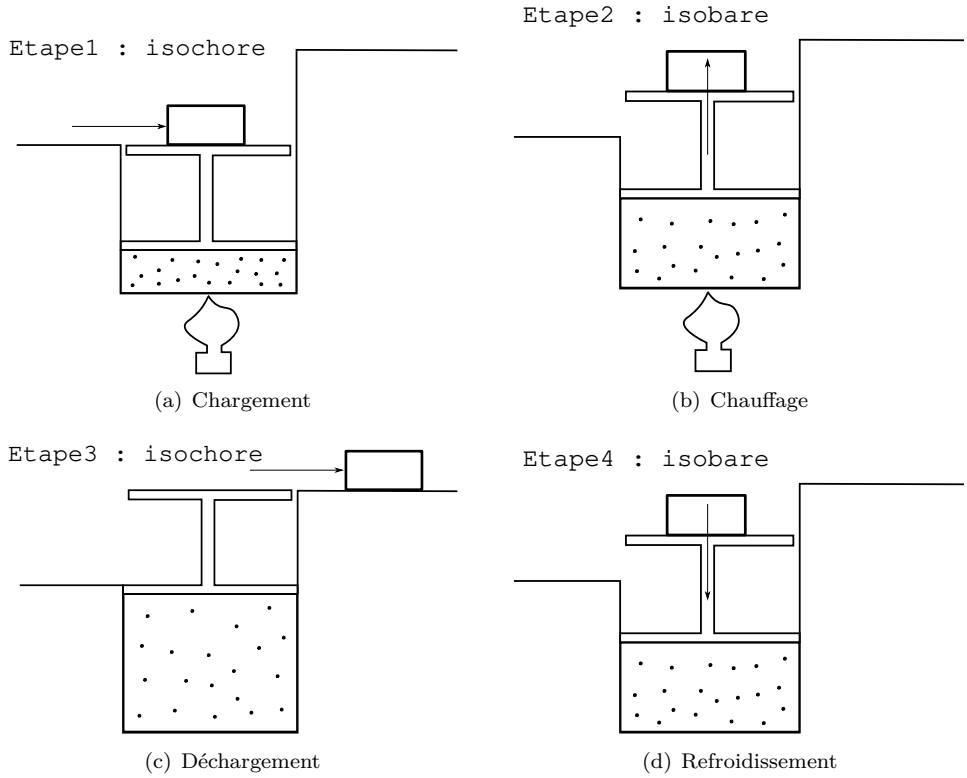
$$V_3 = \frac{n \cdot R \cdot T_3}{p_2} = \frac{205,15 \cdot 8,314 \cdot 2500}{3,41 \cdot 10^5} = 12{,}5\,\text{m}^3$$

enfin, la température de l'état 4 est calculée par :

$$T_4 = \frac{p_1 \cdot V_3}{n \cdot R} = \frac{10^5 \cdot 12,5}{205,15 \cdot 8,314} = 732{,}87\,\text{K}$$

Connaissant les différents états et la nature des transformations menant de l'une à l'autre, on peut tracer le diagramme d'état PV qui se trouve sur la figure 11.10. Y sont représentées les deux isochores (verticales) et les deux isobares (horizontales).

Pour compléter le diagramme PV, il faut calculer les grandeurs caractéristiques des changements

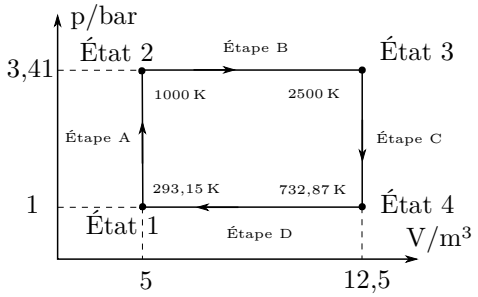


(a) Chargement (b) Chauffage

(c) Déchargement (d) Refroidissement

Figure 11.9 – *Un moteur thermique simple*

Figure 11.10 – *Diagramme d'état*



d'état : chaleur Q, variation d'énergie interne ΔU et travail A pour chaque étape. Le travail total sur le cycle et les échanges de chaleur permettrons de déterminer son rendement.

Voici le détail :

Étape A Il s'agit d'une isochore pour laquelle le travail est nul car $dV = 0$. Le premier principe donne alors pour un gaz diatomique ($i = 5$) :

$$Q = \Delta U = \frac{5}{2} \cdot 205,15 \cdot 8,314 \cdot (1000 - 293,15)$$
$$= 3\ 014\ 039\,\text{J}$$

Étape B Il s'agit d'une isobare pour laquelle le travail vaut :

$$A = p \cdot \Delta V = 3,41 \cdot 10^5 \cdot (12,5 - 5)$$
$$= 2\ 557\ 500\,\text{J}$$

L'énergie interne vaut quant à elle :

$$\Delta U = \frac{5}{2} \cdot 205,15 \cdot 8,314 \cdot (2500 - 1000)$$
$$= 6\ 396\ 064\,\text{J}$$

Et la chaleur est alors :

$$Q = \Delta U + A = 6'396'064 + 2'557'500$$
$$= 8\ 953\ 564\,\text{J}$$

Transf. Unité	Q J	ΔU J	A J
A	3 014 039	3 014 039	0
B	8 953 564	6 396 064	2 557 500
C	−7 535 118	−7 535 118	0
D	−2 624 985	−1 874 985	−750 000
Total	-	0	1 807 500

Table 11.6 – *Grandeurs caractéristiques*

Étape C Il s'agit à nouveau d'une isochore pour laquelle le travail est nul. On a donc :

$$\begin{aligned} Q = \Delta U &= \frac{5}{2} \cdot 205,15 \cdot 8,314 \cdot (732,87 - 2500) \\ &= -7\ 535\ 118\,\text{J} \end{aligned}$$

Étape D Il s'agit à nouveau d'une isobare pour laquelle le travail vaut :

$$\begin{aligned} A = p \cdot \Delta V &= 1 \cdot 10^5 \cdot (5 - 12,5) \\ &= -750\ 000\,\text{J} \end{aligned}$$

Et l'énergie interne :

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{5}{2} \cdot 205,15 \cdot 8,314 \cdot (293,15 - 732,87) \\ &= -1\ 874\ 985\,\text{J} \end{aligned}$$

Ce qui donne une chaleur de :

$$\begin{aligned} Q = \Delta U + A &= -1'874'985 - 750'000 \\ &= -2\ 624\ 985\,\text{J} \end{aligned}$$

En résumé, les grandeurs caractéristiques des transformations de ce cycle sont données dans la table 11.6.

On remarque dans ce tableau que la somme des énergies interne est nulle. C'est normal, car l'état initial et l'état final sont les même et donc la variation de température est nulle. Cela constitue une première vérification des calculs.

D'autre part, on peut calculer la chaleur fournie au gaz. Il s'agit de la somme des Q positifs :

$$\sum Q_+ = 3'014'039 + 8'953'564 = 11\ 967\ 603\,\text{J}$$

On peut aussi calculer la chaleur rejetée par le gaz. Il s'agit de la somme des Q négatifs :

$$\sum Q_- = -7'535'118 - 2'624'985 = -10\ 160\ 103\,\text{J}$$

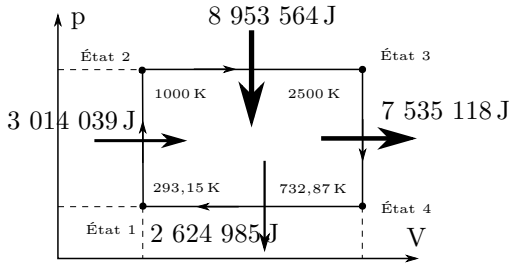
La différence entre la chaleur fournie et celle rejetée constitue le travail fourni par le moteur. Il vaut :

$$A = 11'967'603 - 10'160'103 = 1\ 807\ 500\,\text{J}$$

Cela correspond exactement à la somme des travaux effectués à chaque étape et calculée dans le tableau 11.6. Cela constitue une seconde vérification des calculs.

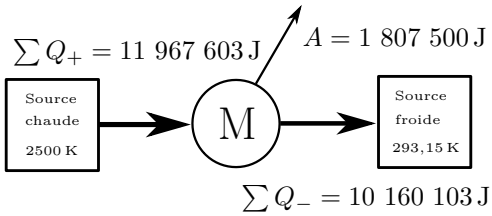
On peut représenter les échanges de chaleur et le travail directement sur le diagramme d'état, comme le montre la figure 11.11.

Figure 11.11 – *Diagramme d'état*



On peut aussi les représenter par un bilan sous la forme donnée par la figure 11.12.

Figure 11.12 – *Diagramme d'état*

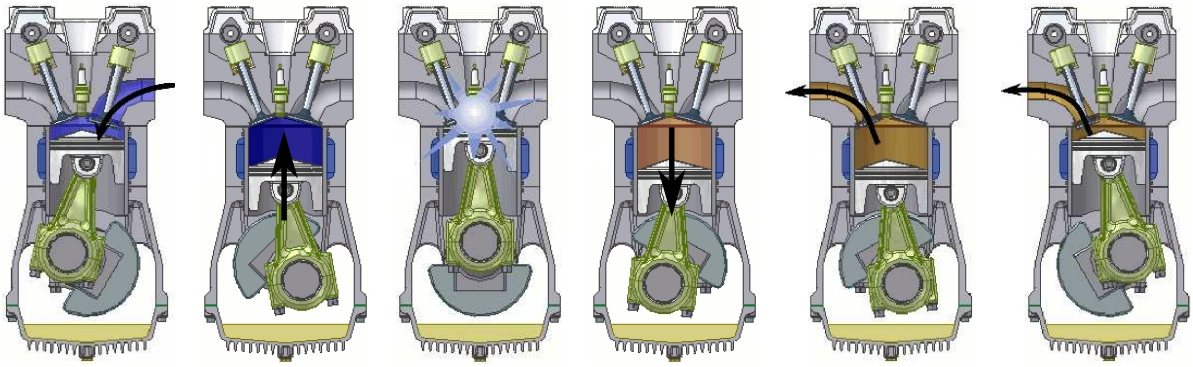


Ce bilan permet de déterminer le rendement du moteur. Il s'agit du rapport entre ce qui est *utile* et ce qui est *utilisé*, autrement dit du rapport entre le travail et la chaleur fournie au gaz :

$$\begin{aligned} \eta = \frac{utile}{utilisé} &= \frac{A}{\sum Q_+} \\ &= \frac{1'807'500}{11'967'603} = 15,1\% \end{aligned}$$

11.5.2 Moteur à explosion

Un autre exemple de moteur thermique est le moteur à explosion et plus particulièrement celui à essence. Si la description qu'on va donner ici reste très



(a) Admission (b) Compression (c) Allumage (d) Temps moteur (e) Échappement (f) Évacuation

Figure 11.13 – *Moteur à explosion*[57]

théorique, elle présente néanmoins ce moteur dans son principe de fonctionnement en relation avec le cycle thermodynamique dit d'Otto ou de Beau de Rochas qui le traduit. Il est constitué des six étapes présentées à la figure 11.13 :

Admission (fig. 11.13(a)) Pendant ce premier temps, la soupape d'admission s'ouvre pour laisser entrer de l'essence et de l'air. Ce mélange est aspiré par l'augmentation du volume dans le cylindre due au déplacement du piston entraîné par l'inertie du mouvement du vilebrequin.

La pression reste donc constante et le volume augmente de manière importante jusqu'à V_1, volume maximum du cylindre. La soupape se ferme alors.

Compression (fig. 11.13(b)) Puis, toujours sous l'effet de l'inertie du vilebrequin, le piston comprime le mélange jusqu'au volume V_2, volume minimal du cylindre.

La pression et la température augmentent rapidement. Aucune chaleur n'est fournie, la transformation peut donc être considérée comme adiabatique.

Allumage (fig. 11.13(c)) Alors que le volume est minimal, la bougie enflamme le mélange et une explosion se produit.

Cela augmente instantanément et très fortement la pression et la température. Le volume n'a pas le temps de changer sensiblement et la transformation est isochore. Le système absorbe de la chaleur.

Temps moteur (fig. 11.13(d)) Sous l'effet de la pression, le gaz se détend en poussant le piston qui entraîne le vilebrequin.

Le moteur produit alors du travail. Comme cela se fait sans échange de chaleur, la transformation est adiabatique. La pression chute et le volume augmente jusqu'à son maximum V_1.

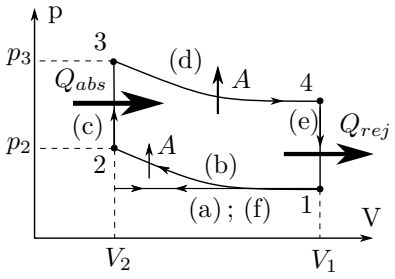
Échappement (fig. 11.13(e)) La soupape s'ouvre alors et immédiatement une partie des gaz sont évacués.

La pression retrouve sa valeur initiale sans que le volume ne change. La transformation est isochore.

Évacuation (fig. 11.13(f)) La soupape reste ouverte pendant que le piston entraîné par le vilebrequin vide le cylindre de ses gaz résiduels pour permettre une nouvelle admission.

La pression reste donc constante et le volume revient à son minimum V_2.

Figure 11.14 – *Diagramme d'état*



Le diagramme d'état de ce cycle est donné à la figure 11.14.

Le cycle d'Otto est donc essentiellement constitué de deux adiabatiques et de deux isochores. La chaleur est absorbée pendant l'allumage. Comme le volume est alors constant, on peut écrire :

$$Q_{abs} = n \cdot C_V \cdot (T_3 - T_2)$$

Évidemment la chaleur est rejetée pendant l'échappement. De la même manière, on peut écrire :

$$Q_{rej} = n \cdot C_V \cdot (T_1 - T_4)$$

La différence constitue le travail fourni par le système pendant le cycle, une partie étant produite par le gaz pendant le temps moteur et une autre absorbée par celui-ci pendant la compression. Attention, $Q_{rej} < 0$ et il faut donc soit additionner les deux chaleur pour avoir le travail qui constitue leur différence ou soustraire l'opposé de la chaleur rejetée, soit $|Q_{rej}| = n \cdot C_V \cdot (T_4 - T_1)$. On a donc :

$$A = Q_{abs} - Q_{rej} = n \cdot C_V \cdot (T_3 - T_2 - T_4 + T_1)$$

Le rendement est alors :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{n \cdot C_V \cdot (T_3 - T_2 - T_4 + T_1)}{n \cdot C_V \cdot (T_3 - T_2)} \\ &= 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \end{aligned}$$

Or, l'équation 11.47, valable pour une transformation adiabatique, peut s'écrire :

$$T \cdot V^{\gamma-1} = \text{const} \;\Rightarrow\; T = \frac{\text{const}}{V^{\gamma-1}}$$

En considérant des constantes différentes pour les deux adiabatiques et le fait que $V_4 = V_1$ et $V_3 = V_2$, cela permet de formuler le rendement en fonction des différents volumes :

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \\ &= 1 - \frac{\text{const}/V_4^{\gamma-1} - \text{const'}/V_1^{\gamma-1}}{\text{const}/V_3^{\gamma-1} - \text{const'}/V_2^{\gamma-1}} \\ &= 1 - \frac{(\text{const} - \text{const'})/V_1^{\gamma-1}}{(\text{const} - \text{const'})/V_2^{\gamma-1}} \\ &= 1 - \frac{V_2^{\gamma-1}}{V_1^{\gamma-1}} = 1 - (\frac{V_2}{V_1})^{\gamma-1} \\ &= 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} \end{aligned}$$

où on a défini le *rapport de compression* par $r = V_1/V_2$.

Ainsi le rendement d'un moteur à essence est :

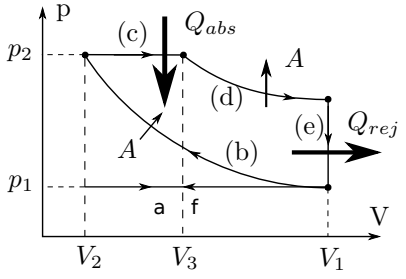
$$\boxed{\eta = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}} \tag{11.64}$$

Pour l'air, on a $\gamma = 1,4$. Avec un rapport de compression typique de huit, le rendement est supérieur à 50%. Or, dans la pratique, on ne dépasse guère les 25%.

11.5.3 Moteur Diesel

Le fonctionnement d'un moteur diésel n'est pas très différent de celui d'un moteur à essence. Pour ce dernier, on a dit que le rapport de compression était d'environ huit. C'est insuffisant pour allumer le mélange spontanément, sans utiliser l'étincelle d'une bougie. Le rapport de compression d'un moteur Diesel étant d'environ quinze, celui-ci est assez important pour élever fortement la température de l'air. Ainsi, lorsque le carburant est injecté à la fin de la compression, il s'enflamme spontanément, mais d'une manière moins explosive que dans un moteur à essence. La transformation thermodynamique correspondant à l'allumage n'est donc plus une isochore, mais une isobare et le diagramme PV est alors celui de la figure 11.15.

Figure 11.15 – *Diagramme d'état*



Comme le cycle d'Otto, le cycle Diesel est donc aussi constitué de deux adiabatiques pendant lesquelles aucune chaleur n'est échangée. Comme dans le cycle d'Otto, la chaleur est rejetée pendant l'échappement. La chaleur absorbée l'est donc pendant la transformation isobare. On a ainsi :

$$Q_{abs} = n \cdot C_P \cdot (T_3 - T_2)$$

et, comme chaleur rejetée :

$$Q_{rej} = n \cdot C_V \cdot (T_1 - T_4)$$

La différence constitue le travail fourni par le système pendant le cycle, une partie étant produite par le gaz pendant le temps moteur et une autre absorbée par celui-ci pendant la compression. Attention, $Q_{rej} < 0$ et il faut donc soit additionner les deux chaleur pour avoir le travail qui constitue leur différence ou soustraire l'opposé de la chaleur rejetée, soit $|Q_{rej}| = n \cdot C_V \cdot (T_4 - T_1)$. On a donc :

$$\begin{aligned} A &= Q_{abs} - Q_{rej} \\ &= n \cdot C_P \cdot (T_3 - T_2) - n \cdot C_V \cdot (T_4 - T_1) \end{aligned}$$

Le rendement est alors :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{n \cdot C_P \cdot (T_3 - T_2) - n \cdot C_V \cdot (T_4 + T_1)}{n \cdot C_V \cdot (T_3 - T_2)} \\ &= 1 - \frac{C_V \cdot (T_4 - T_1)}{C_P \cdot (T_3 - T_2)} \\ &= 1 - \frac{T_1 \cdot C_V \cdot (T_4/T_1 - 1)}{T_2 \cdot C_P \cdot (T_3/T_2 - 1)} \end{aligned}$$

Or, l'équation 11.47, valable pour une transformation adiabatique, peut s'écrire :

$$T \cdot V^{\gamma-1} = \text{const} \;\Rightarrow\; T = \frac{\text{const}}{V^{\gamma-1}}$$

Soit pour la transformation adiabatique (b) :

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{T_2} &= \frac{\text{const}/V_1^{\gamma-1}}{\text{const}/V_2^{\gamma-1}} \\ &= (\frac{V_2}{V_1})^{\gamma-1} = \frac{1}{(V_1/V_2)^{\gamma-1}} = \frac{1}{r^{\gamma-1}} \end{aligned}$$

où $r = V_1/V_2$ est le rapport de compression. Avec la relation 11.50 qui dit que :

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

on a alors un rendement qui s'écrit :

$$\eta = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} \cdot \frac{T_4/T_1 - 1}{\gamma \cdot (T_3/T_2 - 1)}$$

Mais, la transformation isobare (c) et l'équation des gaz parfaits permet d'écrire :

$$\frac{V}{T} = \text{cst} \;\Rightarrow\; \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3} \;\Rightarrow\; \frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_2} = \alpha \quad (11.65)$$

où α est le rapport des volumes de la phase de combustion, nommé "cut-off ratio", qu'on pourrait traduire par "rapport des volumes avant allumage". Il est souvent nommé *taux d'injection*.

De plus, à l'aide de l'équation 11.47, on peut aussi écrire pour chaque adiabatique (b) et (d) :

$$T_4 \cdot V_4^{\gamma-1} = T_3 \cdot V_3^{\gamma-1} \quad (11.66)$$

$$T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_2^{\gamma-1} \quad (11.67)$$

Or, comme $V_4 = V_1$ et grâce à l'équation 11.65, en divisant les deux 11.66 et 11.67 ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned} \frac{T_4}{T_1} &= \frac{T_3}{T_2} \cdot (\frac{V_3}{V_2})^{\gamma-1} \\ &= \frac{V_3}{V_2} \cdot (\frac{V_3}{V_2})^{\gamma-1} = (\frac{V_3}{V_2})^{\gamma} = \alpha^{\gamma} \end{aligned}$$

On peut donc finalement écrire le rendement en fonction du rapport de compression et du taux d'injection comme :

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} \cdot \frac{\alpha^{\gamma} - 1}{\gamma \cdot (\alpha - 1)}}$$

Typiquement le taux de compression r est de l'ordre de vingt pour un moteur Diesel. Cela implique que le rendement d'un moteur Diesel est meilleur que celui d'un moteur à essence (cycle d'Otto ou de Beau de Rochas décrit au paragraphe 11.5.2). En effet, pour un taux de compression de l'ordre de celui d'un moteur Diesel, un moteur à essence produit de l'auto-allumage de manière désordonnée qui le fait cogner et perdre de son rendement. Par contre, pour un taux de compression correspondant à un moteur à essence, le rendement du moteur Diesel est moins bon.

En comparant avec l'équation 11.64 qui donne le rendement d'un moteur à essence (pour un cycle d'Otto) :

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}}$$

on constate la présence du terme supplémentaire :

$$\frac{\alpha^{\gamma} - 1}{\gamma \cdot (\alpha - 1)}$$

On peut voir dans ce terme la nécessité de maintenir un taux d'injection α le plus proche de un pour avoir un rendement maximum. Cela signifie que la combustion doit être la plus brève que possible.

11.5.4 Machine de Stirling

L'étude de ce moteur est intéressante par le fait que son principe de fonctionnement est très simple. De plus sa réalisation peut aussi l'être et cela a permis de construire de petits moteurs de démonstration.

Un moteur de Stirling est

11.5.5 Climatiseur

Nous allons aborder l'étude d'un climatiseur à travers le problème suivant.

11.5.6 Réfrigérateur

Il s'agit d'une machine thermique dont chacun connaît la fonction. Mais son fonctionnement est quant à lui bien moins connu. Sans entrer véritablement dans les détails, nous allons le présenter ici dans son principe thermodynamique.

Fondamentalement, c'est le même que celui d'un climatiseur.

11.5.7 Pompe à chaleur

11.5.8 Cycle de Carnot

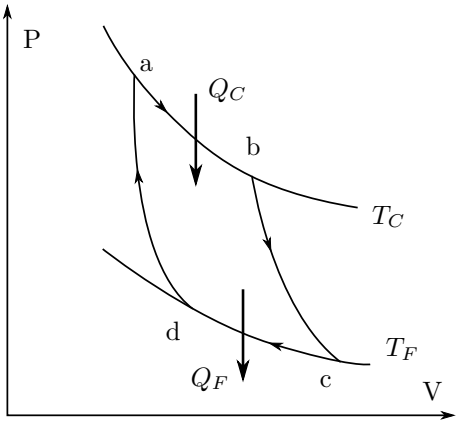
Il s'agit d'un cycle très important, car il possède un rendement maximum qu'aucun moteur ne peut dépasser. Ce rendement n'est pas de 100%, pour des raisons dues au second principe que nous verrons au paragraphe 11.7. Il dépend uniquement de la température des sources chaude et froide. Tous les moteurs dont les sources chaudes et froides lui sont identiques ont un rendement maximum qui lui est égal. C'est pourquoi on utilise le rendement de Carnot pour le comparer à l'efficacité des moteurs fonctionnant dans les mêmes conditions, c'est-à-dire entre deux sources de chaleur identiques.

Voyons maintenant sur quelles transformations repose le cycle de Carnot. Pour cela examinons la figure 11.16 qui donne son diagramme PV.

Ce cycle est composé de deux isothermes, de a à b et de c à d et de deux adiabatiques de b à c et de d à a.

Isotherme a-b Le gaz est chauffé par une source chaude en recevant d'elle une quantité de chaleur Q_C. Il se dilate. La chaleur absorbé produit uniquement un travail, puisque la température ne variant pas, l'énergie interne reste constante.

Figure 11.16 – *Le cycle de Carnot*



Adiabatique b-c On cesse de chauffer et on isole le système pour empêcher tout échange de chaleur. Le gaz continue de se dilater au détriment de son énergie interne.

Isotherme c-d On refroidit le gaz au contact d'une source froide à laquelle il transmet une quantité de chaleur Q_F. Comme sa température ne varie pas, il se contracte.

Adiabatique d-a On cesse de refroidir et on isole le système pour empêcher tout échange de chaleur. Le volume continuant de diminuer, l'énergie interne augmente et la température aussi.

Si on considère que nous avons un cycle, c'est-à-dire que l'état final est le même que l'état initial, ce q signifie que l'énergie interne ne varie pas et donc par le premier principe que la chaleur fournie au cycle est égale au travail qu'il produit.

Pour le calculer, on peut donc écrire :

$$A = Q_{tot} = Q_C - Q_F$$

Comme les chaleurs sont produites par transformation isotherme, l'équation 11.40 permet d'écrire :

$$A = T_C \cdot \ln(\frac{V_b}{V_a}) - T_F \cdot \ln(\frac{V_d}{V_c})$$

En considérant l'équation 11.57 et le fait que $T_a = T_b = T_C$ et $T_c = T_d = T_F$, on peut aussi écrire pour

les deux transformations adiabatiques :

$$T_F \cdot V_c^{\gamma-1} = T_C \cdot V_b^{\gamma-1}$$
$$T_F \cdot V_d^{\gamma-1} = T_C \cdot V_a^{\gamma-1}$$

En divisant ces deux équations, on obtient :

$$\frac{V_c^{\gamma-1}}{V_d^{\gamma-1}} = \frac{V_b^{\gamma-1}}{V_a^{\gamma-1}} \Rightarrow \frac{V_b}{V_a} = \frac{V_c}{V_d}$$

On peut alors calculer le rendement qui est le rapport de l'utile sur l'investi, soit du travail par la chaleur fournie par la source chaude :

$$\begin{aligned}\eta = \frac{|A|}{Q_C} &= \frac{T_C \cdot \ln(V_b/V_a) - T_F \cdot \ln(V_d/V_c)}{T_C \cdot \ln(V_b/V_a)} \\ &= 1 - \frac{|T_F \cdot \ln(V_d/V_c)|}{T_C \cdot \ln(V_b/V_a)} \\ &= 1 - \frac{|T_F \cdot \ln(V_d/V_c)|}{T_C \cdot \ln(V_c/V_d)} \\ &= 1 - \frac{|-T_F \cdot \ln(V_c/V_d)|}{T_C \cdot \ln(V_c/V_d)} \\ &= 1 - \frac{T_F}{T_C}\end{aligned}$$

car $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b) = -(\ln(b) - ln(a)) = -ln(b/a)$ et du fait que le travail doit être compté en valeur absolue, car négatif quand fourni par le gaz sur l'extérieur.

En résumé, pour un cycle de Carnot, le rendement ne dépend que des températures des sources chaude et froide. De plus, ce rendement ne peut être de 100% que si la valeur de la température de la source froide est de 0 K.

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C}} \tag{11.68}$$

Le rendement d'une machine thermique réelle ne pouvant dépasser celle de Carnot, comme on le montrera au paragraphe 11.7, elle ne peut jamais être de 100%.

11.6 Thermodynamique statistique

Au paragraphe 11.3.1, nous avons considéré un gaz parfait du point de vue de ses éléments constitutifs. Reprenons cette approche pour déterminer comment un état donné est réalisé microscopiquement par un gaz. Pour cela, partons d'un volume divisé en trois parties et qui contient trois molécules sans interactions mutuelles. Nous ne prendrons pas en compte les différentes manières de répartir l'énergie interne entre les quatre molécules. Dénombrons le nombre d'états possibles, c'est-à-dire le nombre de manières différentes de placer les trois molécules dans les trois parties. On suppose que les molécules sont identiques. La figure **??** ... montre qu'il existe dix états microscopique différent, dont un comporte une seule molécule dans chaque partie, six comportent deux molécules dans l'une et/ou l'autre des parties et trois comportent trois molécules dans l'une des parties. Visiblement, sur la base du seul critère de la position des molécules, la probabilité de réalisation d'un état avec une, deux ou trois molécules dans une partie est très différente. Certains états sont réalisés plus souvent que d'autres, comme ici celui avec deux molécules dans l'une des parties. Visuellement cet état est aussi le plus désordonné.

De manière plus générale, considérons un volume V décomposé en n parties de volume $v = V/n$ contenant N particules différentes. On peut mettre la première particule dans l'une ou l'autre des n parties. De la même manière, on peut placer les N particules suivantes de n manières différentes. Au total, on a donc n^N manières de peupler notre volume V. Or, comme $n = V/v$, on a :

$$n^N = (\frac{V}{v})^N \sim V^N$$

possibilités de mettre les N particules dans le volume V. Ainsi, plus le volume est grand et plus le nombre de particules est important, plus le nombre de configurations microscopique est important, mais aussi plus l'état le plus désordonné devient probable. L'importance de cette probabilité fait converger l'évolution des systèmes vers l'état de désordre le plus important. Or, en définissant la grandeur *entropie* S d'un système dans un état donné par :

$$\boxed{S = k \cdot \ln(\Omega)} \tag{11.69}$$

où Ω est la probabilité de réalisation microscopique de cet état et k=1,381 $\cdot 10^{-23}$ J/K la constante de Boltzmann, on comprend qu'un système évoluant vers un état de grande probabilité, c'est-à-dire de grand désordre, voit son entropie augmenter.

11.7 Second principe

Cela constitue le contenu du *second principe* de la thermodynamique :

> *L'entropie d'un système isolé ne peut qu'augmenter.*

L'équation 11.69 peut paraître étrange en raison de la présence du logarithme. Pour le comprendre, il faut

Annexe A

Systèmes d'unités

A.1 Introduction

Les unités sont des « objets » d'une importance capitale pour exprimer la valeur d'une grandeur. À chacune d'elle peut correspondre beaucoup d'unités. C'est parfaitement compréhensible étant donné la variété des domaines auxquels elles s'appliquent et à priori il est naturel que chacun définisse les unités qui lui sont les plus pratiques. Mais, deux problèmes se posent alors. Le premier tient dans le fait que plus le nombre d'unités est grand, plus il est difficile de les faire correspondre entre elles. Le second tient dans le fait qu'effectuer des calculs complexes génère des unités complexes. On se heurte donc à des problèmes de *conversion* et à des problèmes de *construction* des unités. C'est pour régler ces deux types de problèmes qu'a été inventé le *Système International d'unités*.

A.2 Opérateur d'unités

Auparavant, voyons comment se construisent les unités. On n'envisage pas ici de décrire comment les unités de base ont été définies historiquement. Leur histoire est intéressante, mais complexe. Pour le mètre, par exemple, on pourra consulter Alder (2005) ou Simaan (2006).

La construction des unités dérivées des unités de base se fait à l'aide de l'opérateur d'unités [...] (il s'agit des "crochets") dont la signification est *« l'unité de ... »*. Ainsi, écrire :

$$[L] = \mathrm{m}$$

signifie que l'unité de la grandeur L est le mètre. Il en va de même avec des unités dérivées comme :

$$[a] = \mathrm{m/s^2}$$

qui signifie que l'unité de la grandeur a est le mètre par seconde au carré.

On peut relever à cette occasion que cette notation permet de savoir comment reporter les unités sur les axes d'un graphique. En effet, de manière générale, on note une grandeur X ainsi :

$$X = x\,[X] \tag{A.1}$$

où X est la grandeur, x sa valeur et $[X]$ son unité. Or, comme ce sont les valeurs d'une grandeur qu'on reporte en regard de l'axe d'un graphique, on peut isoler la valeur de l'équation A.1 :

$$x = X/[X]$$

pour trouver l'expression à mettre à côté de l'axe. Ainsi, pour un axe correspondant à une longueur, il faudrait mettre :

$$\uparrow L/\mathrm{m}$$

Logiquement, on voit qu'il ne vient pas de crochets autour de l'unité, comme cela est parfois pratiqué. De plus, il faut mettre un symbole de division entre la grandeur et l'unité.

Venons en maintenant à la construction des unités. Commençons par des expressions connues comme la vitesse. Pour déterminer les unités à associer à une vitesse, il faut connaître son expression

en termes de grandeurs de base, c'est-à-dire dont les unités sont simples :

$$v = \frac{d}{t}$$

et en prendre les unités à l'aide de l'opérateur d'unités :

$$[v] = [\frac{v}{t}] = \frac{[v]}{[t]} = \mathrm{m/s}$$

On voit que lorsque l'opérateur $[\dots]$ s'applique sur une fraction, il s'applique à chacun de ses termes. On voit aussi la correspondance entre la division des grandeurs et l'expression "par" qui lie les deux unités de base de la vitesse.

Pour des expression plus complexes, cette "algèbre" des unité s'applique aussi. Ainsi, les unités de la force sont obtenues à partir de la seconde loi de Newton :

$$[F] = [m \cdot a] = [m] \cdot [a] = \mathrm{kg\,m/s^2} = \mathrm{N}$$

Mais, des situations plus complexes peuvent se présenter. Pour la période d'un pendule, on a par exemple :

$$\begin{aligned}[T] &= [2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}] = [2] \cdot [\pi] \cdot \sqrt{\frac{[L]}{[g]}} \\ &= \sqrt{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m/s^2}}} = \sqrt{\mathrm{m} \cdot \frac{\mathrm{s^2}}{\mathrm{m}}} \\ &= \sqrt{\mathrm{s^2}} = \mathrm{s}\end{aligned}$$

On voit qu'appliquer l'opérateur d'unité à une racine revient à l'appliquer aux termes de la racine et que diviser une unité par une fraction de deux autres revient à la multiplier par l'inverse de cette fraction, comme en algèbre ordinaire. Ainsi aussi, la racine du carré d'une unité correspond-elle à l'unité elle-même.

Ainsi, par la suite nous rencontrerons des combinaisons d'unités s'appuyant sur des opérations arithmétiques et il sera possible de les manipuler en tant que telles. C'est pourquoi nous dirons que l'opérateur d'unité est un opérateur algébrique. Nous allons voir qu'il est possible de se livrer aussi à une étude des lois du point de vue de leurs unités à travers ce qu'on nomme une *analyse dimensionnelle*.

A.3 Analyse dimensionnelle

Pour comprendre les relations entretenues par différentes grandeurs, plusieurs méthodes sont à notre disposition. Les deux principales sont la déduction mathématique utilisée à partir des axiomes d'une théorie et l'induction expérimentale. L'analyse dimensionnelle est un outil supplémentaire permettant la vérification des lois. On entend par analyse dimensionnelle l'étude des dimensions des grandeurs impliquées, c'est-à-dire l'analyse de leurs unités. Par exemple, si on envisage la force centripète F exercée par la corde qui retient un objet en rotation, on peut écrire :

$$F = m \cdot \frac{v}{R}$$

où m est la masse de l'objet, v sa vitesse et R le rayon du cercle parcouru. En effet, intuitivement, la force doit être forte pour une grande masse et une vitesse importante. Par contre, en imaginant une voiture qui prend un virage, on s'imagine bien que c'est pour un rayon petit que cette force doit être grande. D'où la forme de la relation proposée.

Mais, cette relation est-elle correcte ? Pour en savoir plus procédons à une analyse dimensionnelle. La seconde loi de Newton nous permet d'écrire :

$$[F] = [m] \cdot [a] = \mathrm{kg\,m/s^2}$$

D'autre part, le terme de droite s'écrit :

$$[m] \cdot \frac{[v]}{[R]} = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{m}} = \mathrm{kg/s}$$

On a donc :

$$\mathrm{kgm/s^2} \neq \mathrm{kg/s}$$

et on peut en déduire que la relation est fausse, uniquement sur la base d'une analyse dimensionnelle.

La correction est assez facile à trouver. Comme il faut l'inverse d'un temps au carré et que le temps n'apparaît que dans la vitesse, on peut essayer :

$$F = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Et l'analyse dimensionnelle :

$$\mathrm{kg\,m/s^2} = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m^2/s^2}}{\mathrm{m}}$$

confirme alors l'exactitude de cette relation.

Un tel outil est très puissant et si simple à utiliser qu'il est important de le faire systématiquement.

A.4 Les unités du Système International

Nous avons dit précédemment que le Système International d'unités (SI) a sa raison d'être, non pas dans l'uniformisation (qui n'a pas de sens véritable puisqu'à chaque type de problème un système d'unité adéquat doit être choisi pour simplifier la représentation numérique) mais dans la simplification des calculs. En effet, tous les calculs effectués dans ce système sont prévus (au niveau des constantes utilisées) pour donner des résultats dont les unités restent dans ce système.

A.4.1 Exemple

Par exemple, on peut calculer la période T d'un pendule simple de longueur L grâce à l'équation suivante :

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Pour un pendule de longueur $L = 2\,\text{ft}$, on peut alors calculer la période :

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{2}{9,81}} = 2{,}837\,?$$

La question est de savoir quelle unité attribuer au résultat. Formellement, on peut écrire en utilisant l'opérateur d'unités :

$$[T] = [2] \cdot [\pi] \cdot \sqrt{\frac{[L]}{[g]}} = \sqrt{\frac{\text{ft}}{\text{m/s}^2}}$$

Il est évident que ces unités sont complexes et que le résultat ne peut être exprimé ainsi dans une unité connue. En n'utilisant pas un système cohérent d'unités, il est nécessaire de faire suivre l'ensemble des calculs réalisés par leur équivalent en terme d'unités afin de savoir quelles sont les unités à attribuer aux résultats. Quand les grandeurs utilisées sont complexes, cela devient vite très pénible.

Le "Système International d'unités" est là pour y remédier. En effet, en travaillant exclusivement avec des grandeurs exprimées en unités internationales, on peut garantir que le résultat s'exprimera dans l'unité internationale correspondant à sa grandeur. Ainsi, pour une longueur $L = 2\,\text{m}$, l'exemple précédent donne le résultat suivant :

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2}{9,81}} = 2{,}837\,\text{s}$$

puisque l'unité de temps du Système International est la seconde. Et en effet, comme vu précédemment, on peut écrire :

$$[T] = [2] \cdot [\pi] \cdot \sqrt{\frac{[L]}{[g]}} = \sqrt{\frac{\text{m}}{\text{m/s}^2}} = \sqrt{\text{s}^2} = \text{s}$$

Ainsi, on peut imaginer une grandeur issue d'un calcul faisant intervenir les deux grandeurs suivantes : une force et une masse. Si ce calcul se fait à partir de ces deux grandeurs exprimées dans les unités du système international, dans le cas présent des newtons (N) pour la force et des kilogrammes (kg) pour la masse, alors le résultat est forcément exprimé dans les unités du Système International. Comme il s'agit ici d'une accélération, ces unités sont des m/s^2.

A.5 Conversions

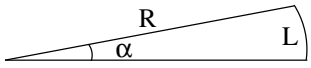
Les unités de la table A.2 ne font pas partie du Système International mais restent utiles :

L'unité astronomique correspond à la longueur du demi-grand axe de l'orbite terrestre.

Le parsec est la distance à laquelle 1 au est vue sous un angle de $1''$ (une seconde) d'arc. Comme 1° est divisé en $60'$ (minutes) d'arc et $1'$ d'arc en $60''$, une seconde d'arc ($1''$) représente 1/3600°. Pour calculer ce que vaut 1 pc, il faut une relation entre la distance réelle L de 1 au et l'angle α ($1''$) sous lequel cette distance est vue. Cette relation est (voir figure A.1) :

$$L = \alpha \cdot R \tag{A.2}$$

Figure A.1 – *Relation de l'arc de cercle*



où R est le rayon de l'arc de cercle de longueur L et d'angle au centre α. Mais, attention, α doit être en radians. Or, comme 180°=π rad,

Table A.1 – *Les unités du Système International*

Grandeur	Symbole	Nom unité	Symbole	Unités de base
Longueur	L	mètre	m	m
Masse	m	kilogramme	kg	kg
Temps	t	seconde	s	s
Température	T	kelvin	K	K
Quantité de matière	n	mole	mol	mol
Angle	α	radian	rad	-
Fréquence	f	hertz	Hz	1/s
Force	F	newton	N	$\mathrm{kg\,m/s^2}$
Énergie, travail	E, A	joule	J	$\mathrm{kg\,m^2/s^2}$
Puissance	P	watt	W	$\mathrm{kg\,m^2/s^3}$

Table A.2 – *Conversions d'unités*

Longueur		**Équivalent SI**
1 Å (angstrœm)	=	$1 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$
1 µ (micron)	=	$1 \cdot 10^{-6}\,\mu\mathrm{m}$
1 in (pouce)	=	$2{,}54 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$
1 ft (pied) = 12 in	=	0,3048 m
1 au (unité astro.)	=	$1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$
1 AL (année lumière)	=	$9{,}4607 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}$
1 pc (parsec)	=	$3{,}0857 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}$

Volume		**Équivalent SI**
Litre : 1 l=1 dm	=	$1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3}$

Énergie		**Équivalent SI**
Calorie : 1 cal	=	4,186 J
1 kW h	=	$3{,}6 \cdot 10^{6}\,\mathrm{J}$

Puissance		**Équivalent SI**
Cheval-vapeur : 1 hp	=	736 W

Température		**Équivalent SI**
0 °C	=	273,15 K

Table A.3 – *Quelques équivalents*

1°=π rad/180 rad et 1″=π rad/(180 rad · 3600 rad). Ainsi on obtient la valeur du parsec :

$$R = \frac{L}{\alpha} = \frac{L \cdot 180 \cdot 3600}{\pi} = \frac{1,496 \cdot 10^{11} \cdot 180 \cdot 3600}{\pi} = 3{,}0857 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}$$

A.6 Sous-multiples

On trouvera dans la table A.4 les principales notations pour les multiples et les sous-multiples. Ces notations sont bien évidemment liées à la notation scientifique. Elle est aussi liée à un autre type de notation, dite notation d'ingénieur, qu'il faut mentionner au moins une fois. En effet, si cette notation est relativement peu utilisée hors des cercles d'ingénieurs, elle est assez souvent présente sur les machines à calculer. Pour qu'elle ne pose pas de problèmes, il est donc plus nécessaire de savoir ne pas l'activer que de savoir l'utiliser. En fait, c'est une notation scientifique, dont les exposants du facteur 10 sont des multiples de 3. Ainsi, par exemple, les mètres (10^0) et les millimètres (10^{-3}) sont utilisés dans cette notation, mais pas les centimètres (10^{-2}).

A.7 Notation scientifique

A ne pas confondre avec la notation d'ingénieur (par multiples de 10^3), la notation scientifique : $\cdot 10^x$, ou x est un nombre entier positif ou négatif, peut être utilisée sur une machine à calculer à l'aide de la touche EXP ou EE . Notez que l'affichage peut alors donner, par exemple :

Préfixe	Symbole	Facteur
peta	P	10^{15}
téra	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
méga	M	10^{6}
kilo	k	10^{3}
hecto	h	10^{2}
déca	da	10^{1}
-	-	-
déci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}

Table A.4 – *Multiples et sous-multiples*

5 E 2	ou même	5^{2}

pour $5 \cdot 10^2$, sans marquer le 10 et avec un 2 sur la même ligne d'affichage que le 5. Ce type d'affichage pose des problème de compréhension et génère des fautes de calcul. Par exemple, pour calculer :

$$(10^{-10})^2$$

l'erreur courante est de taper : 10 [EE] -10. L'affichage donne alors malheureusement :

10 E -10

ce qui est trompeur puisque cela signifie $10 \cdot 10^{-10}$ et non 10^{-10}, c'est-à-dire $1 \cdot 10^{-10}$. Pour cela, il aurait fallu taper : 1 [EE] -10 et l'affichage aurait donné :

1 E -10

A.8 Règles de calcul

Remarquons encore les règles mathématiques très utiles suivantes (voir annexe L) :

$$10^a \cdot 10^b = 10^{a+b} \text{ et } \frac{1}{10^a} = 10^{-a}$$

Elles permettent de réaliser de tête et rapidement des calculs complexes comme :

$$\begin{aligned} F &= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{(2 \cdot 10^4)^2} \\ &= 9 \cdot \frac{2 \cdot 2}{4} \cdot 10^9 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2} \cdot ((10^4)^2)^{-1} \\ &= 9 \cdot 10^{9-3-2} \cdot 10^{2 \cdot (-4)} = 9 \cdot 10^4 \cdot 10^{-8} \\ &= 9 \cdot 10^{-4}\ N \end{aligned}$$

Annexe B

Deux systèmes de coordonnées

B.1 Le système de coordonnées circulaires

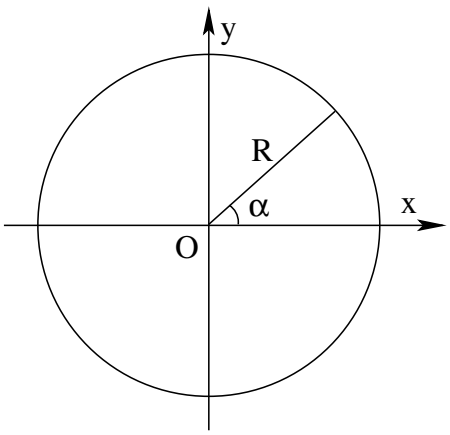
B.1.1 Introduction

Il existe beaucoup de types de systèmes de coordonnées. Chacun est adapté à une utilisation particulière. Pour les mouvements circulaires dans un plan, le système de coordonnées ci-dessous est naturel. Il est intéressant dans le cadre de la rotation des planètes visibles, car non seulement elles tournent toutes sur des orbites (des trajectoires) quasi-circulaires, mais aussi elles sont toutes dans un même plan : le plan de l'écliptique.

B.1.2 Description

Le plan est une surface à deux dimensions. Deux nombres sont donc nécessaires pour déterminer univoquement la position d'un point. Si ce point est sur un cercle, il se déplace en réalité dans un espace unidimensionnel (le cercle lui-même). Une seule coordonnée est alors nécessaire. Il s'agit de l'angle α représenté sur la figure B.1. Le système de coordonnées circulaires consiste donc en cette seule coordonnée. Mais, on lui adjoint souvent le rayon R (bien que cela ne soit pas un degré de liberté puisqu'il est constant).

Figure B.1 – *Système de coordonnées circulaires*



B.2 Coordonnées sphériques

B.2.1 Introduction

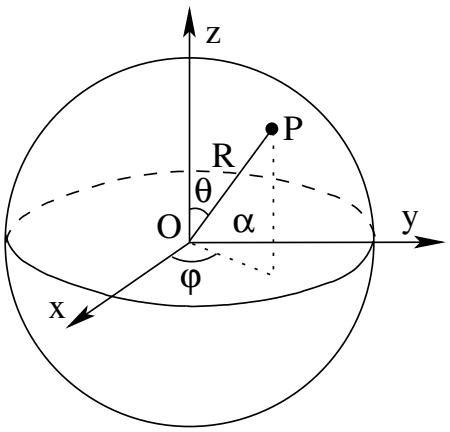
Vu depuis la Terre, le mouvement des corps célestes n'est pas simple. Comme la Terre est sphérique et tourne sur elle-même, le positionnement des objets célestes par rapport à elle se fait naturellement comme si ces objets étaient sur une sphère. D'où l'importance du système de coordonnées ci-dessous.

B.2.2 Description

L'espace dans lequel nous nous trouvons est à trois dimensions. Trois nombres sont donc nécessaires pour déterminer univoquement la position

d'un point P. Si ce point est sur une sphère, il se déplace en réalité dans un espace bidimensionnel. Deux coordonnées sont alors nécessaires. Il s'agit des angles φ, nommé *longitude*, et θ, nommé *colatitude*, représentés sur la figure B.2. Le système de coordonnées sphériques consiste donc en ces deux seules coordonnées. Mais, on leur adjoint souvent le rayon R (bien que cela ne soit pas un degré de liberté puisqu'il est constant).

Figure B.2 – *Système de coordonnées sphériques*



B.2.3 Latitude et longitude

Remarquons finalement que le système de coordonnées utilisé pour repérer un objet à la surface de la Terre est un système de coordonnées sphériques légèrement différent de celui présenté ci-dessus (cf. B.2.2). En effet, il est presque en tout point identique, à l'exception de l'angle θ, la colatitude, qui est compté positivement à partir du plan équateur (x,y) vers le nord (et non à partir du pôle nord vers le sud comme précédemment). L'angle θ est alors nommé *latitude* alors que φ reste la longitude.

Annexe C

Mesures de distances

Il est ici question de présenter quelques exemples de mesures de distances. L'objectif est de se rendre compte à la fois de l'ingéniosité des raisonnements mis en œuvre et des difficultés techniques qui se sont présentées. Cela permet de travailler avec des ordres de grandeurs qui ne nous sont pas familiers et de mieux apprécier les connaissances qui se trouvent derrière les chiffres que les tables mettent à notre disposition.

C.1 La taille de la Terre

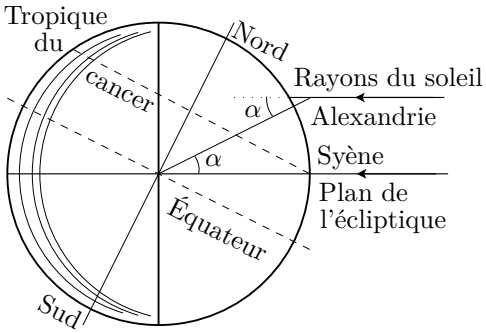
La mesure du rayon de la Terre la plus connue, car très simple et historiquement très ancienne, est celle d'Érathosthène (284-192 av. J.-C.). Le principe est simple, mais la mise en œuvre beaucoup moins évidente. Nous allons successivement voir chacune de ces deux étapes.

C.1.1 Le principe

Il faut tout d'abord relever que nous ne connaissons le travail d'Érathosthène qu'à travers d'autres auteurs (L'astronome Cléomède, l'historien Strabon et le naturaliste romain Pline l'ancien). Ces sources, aussi éminentes soient-elles, ne doivent pas être exemptes de toute critique, comme nous le verrons par la suite.

Le principe de la mesure est simple. Considérons la figure C.1. On y voit la Terre dont l'axe de rotation est incliné par rapport à la perpendiculaire au plan de l'écliptique. On y voit l'ancienne ville de Syène, c'est-à-dire l'actuelle Assouan, qui se trouve sur le tropique du Cancer, au moment du solstice d'été. Le Soleil se trouve alors au zénith, c'est-à-dire à la perpendiculaire de l'horizon du lieu. Ses rayons pourraient alors pénétrer jusqu'au plus profond d'un puits construit verticalement. Au même moment, on peut considérer l'ombre au sol d'un gnomon (un bâton vertical) planté plus au nord à Alexandrie. Sa longueur et celle du gnomon permettent de déterminer l'angle α de la figure C.1. Or, celui-ci a un correspondant au centre de la Terre qui sous-tend l'arc de cercle entre Syène et Alexandrie. Si, par ailleurs, on connaît la mesure de cet arc, il est aisé de déterminer la circonférence de la Terre et, ainsi, son rayon.

Figure C.1 – *Taille de la terre*



Comme Érathosthène à évalué la distance entre Syène et Alexandrie à 5000 stades et la longueur de l'ombre portée par le gnomon à 1/8 de sa hauteur, on peut en déduire :

1. que l'angle α est (anachroniquement car Érathosthène l'a simplement obtenu à partir de

mesures faites avec un scaphé[a]) donné par :

$$\tan(\alpha) = \frac{1/8}{1} = 1/8 \;\Rightarrow\; \alpha = 7,13^\circ = 7^\circ 8'$$

2. que la circonférence de la Terre vaut :

$$C = 5000 \cdot \frac{360}{7,13} = 252\ 631 \,\text{stades}$$

3. et que son rayon vaut alors,

$$C = 2 \cdot \pi \cdot R \;\Rightarrow\; R = \frac{252'631}{2 \cdot \pi} = 40\ 208 \,\text{stades}$$

Évidemment, il faut savoir ce que vaut un stade. Et là apparaît le premier problème. En effet, les estimations varient entre 157,5 et 192,27 m. Si on utilise la première valeur, on a :

$$R = 40'208 \cdot 157,5 = 6333 \,\text{km}$$

Ce qui représente, par rapport à la valeur actuelle, une erreur de :

$$e = \frac{6'378 - 6'333}{6'378} \cdot 100 = 0,7\%$$

alors qu'avec la seconde valeur, on a :

$$R = 40'208 \cdot 192,27 = 7730 \,\text{km}$$

Ce qui représente une erreur de :

$$e = \frac{7'730 - 6378}{6378} \cdot 100 = 21,2\%$$

C.1.2 Techniquement

On loue souvent la méthode d'Érathosthène pour la précision de sa mesure. Mais comme on ne connaît pas de manière certaine la valeur du stade, il faut être très prudent.

D'autant plus prudent que ce n'est pas le seul problème posé par la mesure d'Érathosthène[b]. Jean-Baptiste Joseph Delambre dans (Delambre, 1821, p. 92-96.) développe une critique de la mesure d'Érathosthène basée sur les points suivants :

La mesure de l'angle , tout d'abord. On ne sait pas précisément comment Érathosthène a mesuré cet angle. Il a pu utiliser un scaphé[c] ou d'un gnomon de grande taille (environ cinq mètres). Évidemment, la mesure avec un gnomon de cinq mètres est plus précise que celle avec un scaphé de plus petite taille. Or, avec un gnomon de cinq mètres, en imaginant une précision de ± 3 mm sur l'ombre portée, on peut déterminer l'imprécision sur l'angle en considérant un triangle rectangle de côté adjacent valant cinq mètres et de côté opposé valant 3 mm. Ainsi, on a :

$$tan(\Delta\alpha) = \frac{3}{5000} \;\Rightarrow\; \Delta\alpha = 0,034^\circ = 2'$$

Avec un gnomon de 1 m, l'incertitude angulaire, correspondant à 3 mm sur l'ombre, vaut plus de $10'$. Ce qui met en évidence la difficulté à réaliser la mesure.

D'autant plus que l'ombre du Soleil n'est pas nette en raison de son diamètre apparent. En effet, le diamètre apparent du Soleil, c'est-à-dire l'angle sous lequel on le voit, est de $32'$. Cela signifie que par rapport à l'ombre d'un gnomon idéal pointant directement vers le centre d'un soleil ponctuel, l'ombre d'un gnomon réel sera $15'$ plus longue (par un flou de l'extrémité de l'ombre), en raison des rayons provenant du bord du disque solaire.

Au minimum donc, l'erreur est de l'ordre de $17'$. Or, cela correspond alors à une erreur sur le rayon de la Terre d'environ 5% dans le cas d'un stade à 157,5 m et à 26% au maximum dans le cas d'un stade de 192,27 m !

La mesure de l'arc , ensuite. Les calculs précédents montrent que la valeur du stade est déterminante pour la qualité de la mesure effectuée par Érathosthène. Mais, la valeur de l'arc aussi. Car, outre le fait que notre connaissance de la valeur du stade est incertaine, il semble que les mesures de distances aient pu se faire en durée de marche. Par exemple, à une journée de marche correspondrait 200 stades. Ce qui permet de comprendre l'incertitude de la mesure. Par ailleurs, Érathosthène a lui-même fait un arrondi significatif. Considérant la distance de

a. Le scaphé est une sorte de bol en forme de demi-sphère muni en son centre d'un gnomon, c'est-à-dire un petit stylet vertical.

b. Les points ci-dessus sont aussi développés dans (Simaan, 2002, p. 1193-1196).

c. Op. cit. a

250 000 stades pour la circonférence de la Terre (obtenue avec un angle de 7°12′), il détermine la distance par degré : 250000/360 = 694,44 stades et ... l'arrondit à 700 stades. Il recalcule alors la circonférence terrestre et obtient 700 · 360 = 252 000 stades.

Si ce qui précède montre qu'il faut être très prudent avec cette mesure de la Terre, cela permet aussi de se rendre compte qu'une mesure est toujours liée à l'incertitude des termes qui ont permis de l'obtenir. Sans l'évaluation de ces incertitudes, la mesure peut ne pas être significative. Bien entendu la méthode utilisée par Érathosthène est remarquable. Mais sa portée n'en reste pas moins limitée par la précision des mesures qu'elle utilise. Et, parallèlement, la portée historique de cette mesure est aussi à évaluer à l'aulne de ces incertitudes. C'est pourquoi, tout historien consciencieux ne peut se passer d'avoir une bonne connaissances des méthodes de mesures utilisées à l'époque et des moyens mathématiques nécessaires pour évaluer leur précision.

C.2 La taille de la Lune

Une première méthode simple consiste à observer une éclipse de Lune. On peut voir alors l'ombre de la Terre sur la Lune. En reproduisant un cercle qui épouse la forme de cette ombre, on peut déterminer le rapport de taille entre ces deux corps. La méthode paraît simple. Cependant, elle se complique quand on considère les deux problèmes suivants :

— La distance du Soleil à la Terre est finie et le Soleil a une taille importante par rapport à la Terre. Ainsi, l'ombre portée par la Terre sur la Lune n'a pas exactement la taille de la Terre.

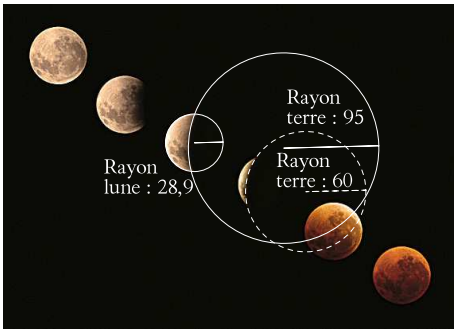
— Sans photographie d'éclipses de Lune, il est très difficile de trouver le rapport de la taille de l'ombre de la Terre à celle de la Lune.

Même de nos jours, si on utilise des images trop petites, l'incertitude sur le rayon du cercle qui soustend l'ombre de la Terre sur la Lune est important. La figure C.2 montre en effet, suivant l'image choisie, un rapport de 95/28, 9 = 3, 3 à 60/28, 9 = 2, 1.

Et cela sans tenir compte du premier point mentionné ci-dessus.

Cependant, cette méthode permet une première évaluation de la taille de la Lune. Pour cela, il faut

Figure C.2 – *Taille de la lune*
Une taille incertaine[58]



encore tenir compte du premier point évoqué ci-dessus. On peut le faire de manière très rapide en constatant que lors des éclipses de Soleil, l'ombre portée par la Lune sur la Terre est très petite. On estime que sur la distance Terre-Lune l'ombre de la Lune est réduite d'environ 70%. On peut donc supposer qu'il en va de même pour l'ombre de la Terre portée sur la Lune lors d'éclipses de Lune. Ainsi, en prenant un rapport de diamètre de l'ombre de la Terre sur la Lune à la taille de la Lune de $2,5\times$ environ, le rapport de la taille de la Terre (et non de son ombre sur la Lune) à celle de la Lune vaut $3,5\times$ (car $0,7^{-1} = 1,4$ et $2,5 \cdot 1,4 = 3,5\times$).

On peut alors calculer la taille de la Lune à partir de la mesure du rayon terrestre d'Érathosthène. Si on admet qu'il ait pu obtenir une valeur du rayon de la Terre $R = 6333$ km, le rayon de la Lune r est alors :

$$r = \frac{R}{3,5} = \frac{6333}{3,5} = 1809\,\text{km}$$

Soit, par rapport à la valeur admise actuellement de 1738 km, une erreur de 4%.

C.3 La distance Terre-Lune

A partir de la valeur du rayon de la Terre, la mesure de la distance Terre-Lune est aisée. Il faut considérer que l'angle α sous lequel on voit la lune est d'un demi-degré, soit en radian $\pi/360 =$ 0,0087 rad. Alors, à l'aide d'une simple relation liant la longueur d'un arc L à son angle α au centre

en radian et au rayon R du cercle, on tire :

$$L = \alpha \cdot R \Rightarrow$$
$$R = \frac{L}{\alpha} = \frac{\phi_{lune}}{\alpha}$$
$$R = d_{Terre-Lune} = \frac{3618}{0,0087} = 415\ 862\,\text{km}$$

Ce qui représente environ 8% d'écart avec la valeur d'aujourd'hui.

De nos jours, la distance de la Terre à la Lune est mesuré par la réflexion de faisceaux laser sur des miroirs déposés par les missions Apollo. Elle atteint une précision de l'ordre de quelques millimètres.

C.4 La distance Terre-Soleil

La mesure de distances plus importantes que celle de la Terre à la Lune fut réalisée par la suite à l'aide de la méthode de la parallaxe. On peut évoquer ici cette méthode qui nécessite une observation en deux points différents de la Terre. Une variante de cette méthode sera utilisée pour la mesure des distances aux étoiles.

La mesure de la parallaxe repose sur l'idée suivante. Quand on observe son pouce levé devant soi à bout de bras avec l'œil droit puis l'œil gauche alternativement, on voit qu'il se déplace par rapport aux objets éloignés. Si le pouce est proche des yeux, il se déplace fortement et s'il est éloigné, il se déplace faiblement. L'observation de son mouvement permet donc de se faire une idée de la distance entre les yeux et le pouce.

En termes astronomiques, on voit sur la figure C.3 que l'angle α entre une étoile lointaine et la Polaire est le même pour deux points d'observation C et P sur la Terre. Pour un astre peu éloigné M, ces deux angles β et γ sont différents. On appelle parallaxe de l'astre M l'angle δ qui vaut :

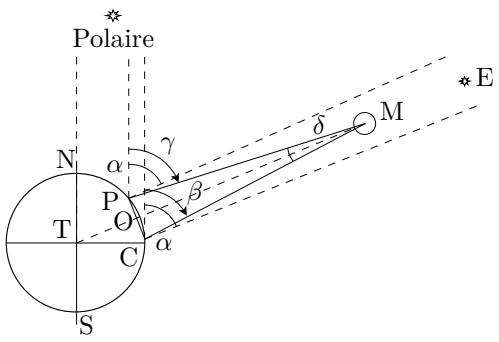
$$\delta = \gamma - \beta$$

en raison du fait que deux droites parallèles sont toujours coupées par une troisième droite selon deux angles égaux.

L'astronome Cassini, qui détermina pour la première fois la distance Terre-Soleil à partir de la parallaxe de Mars, décrit la mesure ainsi :

"*La meilleure méthode pour chercher la parallaxe de Mars par la correspondance des observations faites à Paris & en Caïenne auroit été d'observer, par la lunette, la conjonction précise de cette planète avec une étoile fixe. Car si cette conjonction avoit été vue de l'un & de l'autre lieu au même instant & précisément de la même manière sans aucune distance, c'eût été une marque qu'il n'y avoit point de parallaxe sensible. S'il y en avoit eu quelque peu, à l'instant que Mars auroit paru toucher par son bord supérieur une Etoile fixe en Caïenne, il auroit paru à Paris un peu éloigné de la même Etoile vers l'Horizon, & quand il auroit paru à Paris toucher l'Etoile par son bord inférieur, il auroit paru en Caïenne éloigné de la même Etoile vers le Zénit & cette distance vue d'un lieu & non pas de l'autre, aurait été attribuée à la parallaxe*"
J. D. Cassini, dans "Mémoires de l'Académie Royale des Sciences", volume 8, année 1730.[59]

Figure C.3 – *Parallaxe de Mars*
Première étape pour déterminer la distance Terre-Soleil.



L'application de cette méthode pour déterminer la position d'un astre comme Mars, M sur le schéma C.3, consiste à observer cette planète simultanément depuis deux endroits éloignés l'un de l'autre à la surface de la terre. Deux observateurs P et C (les astronomes Cassini à Paris et Richer à Cayenne, en 1672) mesurent au même moment l'écart angulaire entre Mars M et une étoile E en arrière plan. La somme des deux angles mesurés constitue l'angle δ au sommet du triangle PMC,

soit la parallaxe. En raison de l'important éloignement de Mars par rapport à la distance PC (Paris-Cayenne), on peut poser grâce à la relation A.2, page 165 :

$$\delta = \frac{PC}{MO} \Rightarrow MO = \frac{PC}{\delta}$$

La distance PC, approximativement la distance entre Paris et Cayenne, permet alors de trouver MO. La distance de la Terre à Mars vaut alors :

$$d_{T-M} = MO + OT = MO + R_T \qquad \text{(C.1)}$$

où R_T est le rayon de la Terre.

Le résultat est donné par Cassini lui-même :

> "*Le 5 septembre 1672, trois jours avant l'opposition du Soleil à Mars, nous observâmes à Paris trois Etoiles dans l'Eau Aquarius marquées par Bayerus* Ψ*, vers lesquelles Mars alloit par son mouvement particulier rétrograde, de sorte que l'on jugeoit qu'il en auroit pu cacher une. Il étoit alors un peu plus septentrional que la plus septentrionale des trois. On prit la hauteur Méridienne de celle-ci qui passoit la première ; & celle de la moyenne vers laquelle le mouvement particulier de Mars s'adressoit. Par le choix des Observations les plus exactes & les plus conformes entre elles, on fixa à 15″ la parallaxe que fait Mars de Paris à Caïenne*" J. D. Cassini, dans "Mémoires de l'Académie Royale des Sciences", volume 8, année 1730.[60]

Le résultat de la mesure est donc de quinze secondes d'arc. Mais attention, il s'agit de la parallaxe qui est la moitié de l'angle δ. Celui-ci vaut donc : $\delta = 0,008332°$ ou $1{,}454 \cdot 10^{-4}$ rad. Avec une distance de Paris à Cayenne de 7082,1 km cela donne :

$$MO = \frac{7,0821 \cdot 10^6}{1,454 \cdot 10^{-4}} = 4{,}87 \cdot 10^{10}\,\text{m}$$

Soit une distance entre la Terre et Mars de :

$$d_{T-M} = 4,87 \cdot 10^{10} + 6,371 \cdot 10^6 = 4{,}87 \cdot 10^{10}\,\text{m}$$

Mais ce n'est là que la distance de la Terre à Mars. Il fallait encore réaliser une condition de mesure pour obtenir la distance Terre-Soleil : choisir le bon moment. Cassini précise que la mesure fut faite trois jours avant l'opposition du Soleil à Mars. Cela signifie qu'alors la Terre se trouvait sur une même ligne entre Mars et le Soleil. A ce moment, et seulement à ce moment, on peut écrire :

$$d_{S-M} = d_{T-M} + d_{S-T} \qquad \text{(C.2)}$$

où on n'a pas tenu compte du caractère elliptique des orbites, notamment de celle de Mars (voir ci-dessous). Mais, l'équation C.2 a deux inconnues : les distances Mars-Soleil et Terre-Soleil. Pour les déterminer, il faut une seconde équation.

Il s'agit de la troisième loi de Kepler, donnée par l'équation 2.16, page 49, appliquée au cas de la Terre et de Mars :

$$\frac{d_{S-T}^3}{T_T^2} = \frac{d_{S-M}^3}{T_M^2} \qquad \text{(C.3)}$$

où d_{S-T} et d_{S-M} sont les distances Soleil-Terre et Soleil-Mars et T_T et T_M leur périodes respectives.

Le système composé des équations C.2 et C.3 est un système de deux équations à deux inconnues. Pour le résoudre, remplaçons la distance d_{S-M} de l'équation C.2 dans la troisième loi de Kepler C.3 :

$$\frac{d_{S-T}^3}{T_T^2} = \frac{d_{S-M}^3}{T_M^2} \Rightarrow$$

$$d_{S-T}^3 \frac{T_M^2}{T_T^2} = d_{S-M}^3 \Rightarrow$$

$$d_{S-T}^3 (\frac{T_M}{T_T})^2 = (d_{T-M} + d_{S-T})^3 \Rightarrow$$

$$d_{S-T} (\frac{T_M}{T_T})^{2/3} = d_{T-M} + d_{S-T} \Rightarrow$$

$$d_{S-T} (\frac{T_M}{T_T})^{2/3} - d_{S-T} = d_{T-M} \Rightarrow$$

$$d_{S-T} ((\frac{T_M}{T_T})^{2/3} - 1) = d_{T-M} \Rightarrow$$

$$d_{S-T} = \frac{d_{T-M}}{(T_M/T_T)^{2/3} - 1} \qquad \text{(C.4)}$$

Numériquement, avec les période de Mars et de la Terre $T_T = 365\,j$ et $T_M = 686\,j$, on obtient :

$$d_{S-T} = \frac{4,87 \cdot 10^{10}}{(686/365)^{2/3} - 1} = 9{,}31 \cdot 10^{10}\,\text{m}$$

Ce qui représente un écart de 38% par rapport à la valeur de l'unité astronomique connue actuellement : $d_{T-S} = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m. Cet écart est important. La moitié de celui-ci peut être attribuée à

l'excentricité de Mars. En effet, un calcul [d] basé sur l'hypothèse d'une orbite terrestre circulaire, mais d'une orbite elliptique de Mars mène au résultat suivant :

$$\begin{aligned} d_{S-T} &= \frac{d_{T-M}}{(1-e)(T_M/T_T)^{2/3}-1} \\ &= \frac{4,87 \cdot 10^{10}}{(1-0,093)(686/365)^{2/3}-1} \\ &= 1{,}27 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} \end{aligned} \qquad \text{(C.5)}$$

où e est l'excentricité de l'orbite de Mars. La valeur obtenue à l'aide de l'équation C.5 ne représente plus alors qu'un écart de 15%.

C.5 La distance des étoiles

On a vu que la parallaxe de Mars est d'environ $15''$ d'arc. Cette valeur est vraiment très petite. Il est donc impossible d'effectuer une mesure de la parallaxe d'une étoile à l'aide de la méthode utilisée pour Mars. Deux observations simultanées en deux endroits différents de la Terre ne permettent pas une telle mesure. Par la méthode de la parallaxe, la seule grandeur qu'il est possible de modifier est la distance entre les deux points d'observation. Comme des distances de l'ordre du rayon de la Terre ne suffisent pas, un effet de parallaxe plus important fut obtenu en effectuant la mesure à six mois d'intervalle. Ainsi, la distance entre les deux "points de vue" correspond au diamètre de l'orbite terrestre. La première mesure de la parallaxe d'une étoile (parallaxe stellaire) a été faite en 1838 par Friedrich Wilhelm Bessel pour la binaire 61 du Cygne. Mais, même pour une telle distance, les parallaxes d'étoiles restent inférieures à la seconde d'arc. Par exemple, pour Proxima du Centaure, l'étoile la plus proche de nous, la parallaxe vaut 760 millisecondes d'arc.

d. En opposition, le demi-grand axe de l'orbite de Mars s'exprime en réalité par : $a_M = e \cdot a_M + d_{S-T} + d_{T-M}$. La grandeur $e \cdot a_M$ représentant la distance du centre de l'ellipse de Mars au foyer sur lequel se trouve le Soleil. On ne calcule plus alors dans l'équation de Kepler la distance d_{S-M}, mais le demi-grand axe a_M.

Annexe D

Travaux pratiques

D.1 Le rapport de laboratoire

TOUT D'ABORD, un avertissement. La "méthode" de construction d'un rapport présentée ci-dessous est propre à celle d'une discipline scientifique. Elle constitue une manière de faire qui est actuellement reconnue. Pourtant l'histoire montre que la présentation des résultats a souvent adopté des formes très différentes. On doit donc plus la comprendre comme le rappel d'un nécessaire souci de rigueur que comme une exigence formelle. De plus, si elle est un outil particulièrement bien adapté à la présentation de cette forme de savoir qu'est la science, elle ne l'est certainement pas pour d'autres formes de connaissances. En effet :

> "*La conception et la mise au point d'instruments spécifiques, toujours plus diversifiés, est l'une des marques du progrès technique. Comment croire que le progrès intellectuel puisse suivre un chemin inverse ? S'il existe aujourd'hui des dizaines de types de tournevis, de scies, de rabots, peut-on sérieusement imaginer que la pensée, elle, puisse se contenter d'une aussi pauvre panoplie que celle empruntée aux seules sciences dites exactes ?*"
> (Lévy-Leblond, 1996, p. 13-14)

L'objectif premier d'un rapport est de réaliser une trace du travail effectué. C'est d'abord un souvenir destiné à l'expérimentateur.

Le second objectif est de permettre à d'autres personnes de s'intéresser au travail réalisé.

Ces deux objectifs ne peuvent être réalisés sans qu'une attention particulière ne soit portée sur la clarté et la concision.

Les détails de la réalisation d'un rapport peuvent varier beaucoup en fonction des spécificités de l'expérience et de la personnalité de l'expérimentateur. Cependant, si une certaine liberté en ce domaine devrait être toujours possible, pour ne pas oublier de traiter des points importants et pour faciliter la lecture de personnes qui s'attendent à trouver certaines formes définies de rapport, il est recommandé de suivre une structure de rapport-type déterminée par l'expérience.

Le rapport à présenter sur une expérience terminée est aussi important que l'expérience elle-même. Il doit être ordonné, exprimé dans un langage simple et concis, et ne comporter que les faits importants de l'expérience. Ce genre d'exercice se retrouve dans toutes les disciplines. La qualité d'un procès-verbal ou d'un rapport peut être déterminante pour des décisions importantes ou pour l'avenir de leur auteur.

Pensez, lorsque vous l'écrivez, que vous vous adressez à un lecteur du même niveau que vous, par exemple un de vos camarades qui était absent le jour de l'expérience, et imaginez qu'il doit prendre connaissance et comprendre l'essentiel de votre travail de laboratoire.

Lorsque deux élèves font une expérience, ils présentent un seul rapport et obtiennent ainsi une même note de laboratoire. Il s'agit d'un travail de groupe. Il est important que chaque élève participe à l'élaboration de chaque rapport en collaboration avec son collègue.

D.1.1 Plan d'un rapport de travail pratique

En règle générale, pour oublier le moins de choses importantes possibles, un rapport est structuré de la manière qui suit.

D'un point de vue typographique, il faut relever que les titres de sections ne doivent pas être soulignés, ni ponctués (ni par un point, ni par un double point). Ils sont simplement mis en évidence par une taille de caractère légèrement supérieure à celle du corps de base.

Préliminaires

Titre de l'expérience, noms des auteurs, classe et date. Le titre doit être explicite, c'est-à-dire qu'il doit donner une première idée du sujet abordé et non se limiter à dire qu'il s'agit de physique, comme par exemple : "Laboratoire de physique". Il ne doit pas y avoir d'abréviations, ni d'acronymes.

Résumé

Relevons la nécessité de mettre juste après le titre, pour des rapports long (plus de deux pages), un résumé (aussi appelé en anglais "abstract") complet de l'expérience.

Maximum cinq lignes !

Il s'agit d'une synthèse de tout le rapport. Un lecteur pressé devrait, en ne lisant que le résumé, se faire une bonne idée du contenu du document entier. Il faut donc, grâce au résumé, pouvoir se faire une idée du but, de la méthode, des résultats, de leur qualité et des problèmes rencontrés.

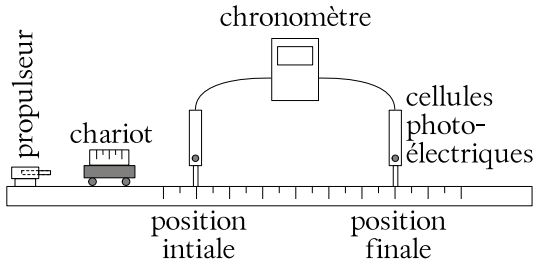
Bien que placé juste après le titre, il est bien évident que ce résumé ne peut se faire qu'en dernier lieu.

Ce résumé est difficile à réaliser mais est très important car il permet, pour un lecteur extérieur, comme pour l'expérimentateur, quelques années après la réalisation de l'expérience, de se rendre compte très rapidement (sans devoir relire l'ensemble du rapport) de l'intérêt du travail réalisé et donc de la nécessité éventuelle d'entamer la lecture du rapport lui-même.

But

C'est l'indication de l'objectif du travail de laboratoire. Une ou deux lignes.

Figure D.1 – *Rail horizontal*
(Notez le titre et la référence dans le texte qui permet au schéma de ne pas se trouver directement sous le texte.)



Théorie

Cela peut être l'énoncé d'une relation traitant du but de l'expérience et à confirmer. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire d'en présenter tout le développement. Seule la relation et les éventuelles hypothèses sur lesquelles elle se base, avec une légende des termes utilisés, doivent être reportées.

En l'absence d'une relation théorique établie, cela peut aussi être un raisonnement, à confirmer expérimentalement, donnant une indication sur le résultat probable ou logique de l'expérience.

On peut avoir recours à une annexe (placée en fin de rapport) pour développer des points théoriques non essentiels mais méritant de retenir notre attention.

Description de l'expérience

Il s'agit de décrire la méthode expérimentale sans trop entrer dans les détails. Il ne faut pas faire une liste des manipulations du type "mode d'emploi", ne pas écrire une procédure, mais rester au niveau de la méthode, de manière à ce qu'on comprenne le pourquoi de la réalisation expérimentale sans trop entrer dans les détails du comment. Un schéma du dispositif expérimental avec un titre et une légende complétera la description. Un exemple est donné à la figure D.1.

Résultats

Les résultats doivent impérativement figurer dans le corps du rapport. Selon les cas, ils peuvent être constitués de mesures brutes ou issus du calcul de grandeurs dérivées. Ils en constituent, avec la discussion (voir plus loin) l'une des deux parties

principales et doivent, à ce titre, obligatoirement être présents dans le corps du rapport. Cependant, ils peuvent être présentés sous différents formes :

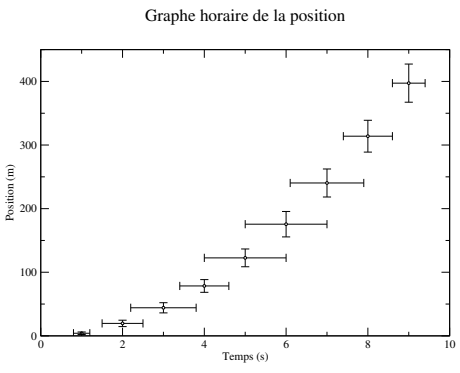
1. Graphiques des résultats

   C'est la présentation la plus concise possible des résultats obtenus. Elle est bien plus lisible que les tableaux et c'est pourquoi on doit la privilégier. Il faut cependant faire attention à présenter les grandeurs, brutes (mesures) ou dérivées (issues d'un calcul), qui représentent au mieux les résultats en fonction des buts choisis.

   Tout graphique doit avoir un titre, des axes portant clairement les symboles des grandeurs concernées et leurs unités. On n'indique pas les coordonnées des points sur les graduations, mais des valeurs d'accroissement régulier. Les points expérimentaux ne sont jamais reliés (ce qui pourrait faire croire que des mesures ont été faites entre les mesures principales), mais on peut faire passer la meilleure courbe possible à travers ceux-ci. On indique les barres d'incertitudes de chaque axe aux points où les calculs ont été faits.

   Un exemple est présenté à la figure D.2.

Figure D.2 – *Chute libre*



2. Tableau des mesures

   Les mesures effectuées au laboratoire, lorsqu'elles sont peu nombreuses, peuvent être mises dans un ou plusieurs tableaux ayant la forme présentée dans le tableau D.1. La première ligne présente les grandeurs physiques et leurs symboles. La seconde donne les unités des grandeurs et la troisième les incertitudes absolues des mesures directes (non calculées à partir d'autres grandeurs). Enfin, les suivantes présentent les résultats. Attention, présenter trop de résultats simultanément nuit à la lisibilité d'un tableau. Par ailleurs, une bonne lecture d'un tableau passe par sa simplification : pas de colonne de valeurs identiques qu'on peut présenter une seule fois avant le tableau, pas de colonnes exagérément large, et donc de vide inutile, en raison d'un titre trop long, pas de colonnes de calculs intermédiaires sans raison aucune, etc.

Table D.1 – *Tableau de mesures*

temps t	**position x**	**vitesse v**
s	cm	cm/s
0,1	0,10	
$2,0$	$31,6$	$1,8$
$2,4$	$17,8$	$3,2$
$2,6$	$12,4$	$4,8$

Si les mesures sont trop nombreuses, pour améliorer la lisibilité du rapport, on peut les reporter en annexe. Encore une fois, il faut alors impérativement présenter les résultats principaux, significatifs ou importants qui constituent, à proprement parlé, les résultats de l'expérience. Par exemple, dans la recherche d'une accélération à partir de mesures d'une distance parcourue et d'un temps, on peut reporter en annexe les nombreuses mesures réalisées, mais pas les valeurs d'accélération qui en découlent et constituent les résultats de l'expérience.

Par ailleurs, il faut ici insister sur ce qui est nécessaire pour permettre la comparaison entre théorie et expérience. Une notion simple permet de quantifier la différence entre une mesure, notée $valeur_{exp}$, et une valeur théorique, notée $valeur_{th}$, celle d'écart ou d'erreur :

$$e(\%) = \frac{valeur_{th} - valeur_{exp}}{valeur_{th}} \cdot 100 \tag{D.1}$$

Lorsqu'une valeur théorique est très précisé-

ment connue, on parle d'erreur à la valeur théorique plutôt que d'écart. Relevons enfin la nécessité de maintenir le signe du résultat pour détecter une éventuelle erreur systématique.

3. Exemples de calcul
   Lorsque des résultats sont obtenus à partir d'opérations sur des mesures directes, on donne un ou deux exemples des calculs effectués en précisant bien leur position dans le tableau d'où elles ont été extraites.
4. Calcul des incertitudes
   Les calculs des incertitudes des grandeurs indirectement obtenues (par calcul) sont présentés dans un ou deux cas en précisant bien lesquels dans le tableau.
   A défaut, quelques mesures permettant de se faire une idée des incertitudes doivent être présentées et brièvement commentées pour évaluer la qualité de l'expérience.

Discussion

Il s'agit d'une analyse du travail. S'il n'existe pas de méthode permettant de faire une bonne discussion, on peut relever que souvent les points suivants apparaissent.

1. Une explication en français des résultats présentés dans les graphes. Un graphe, s'il est plus lisible qu'un tableau, ne suffit pas. Des explications claires améliorent la compréhension.
2. On compare les résultats avec les prévisions théoriques. On met en évidence leur signification. On discute leur qualité. On insiste sur les mesures s'écartant des prévisions, on tente de les expliquer logiquement ou on présente d'autres mesures de confirmation. On remet en cause les mesures autant que la théorie si nécessaire.
3. On remet en question la méthode et on propose des améliorations.

C'est la partie la plus dense et la plus importante du rapport.

Conclusion

Il s'agit de dire très brièvement si le but a été atteint et de juger s'il l'a été bien, partiellement ou mal.

Annexes

Tout ce qui nuit à la lisibilité du rapport, mais a une certaine importance à vos yeux, doit être mis en annexe. Chacune de celles-ci doit comporter un titre relatif à son contenu.

D.2 La nébuleuse du Crabe

D.2.1 Introduction

La nébuleuse du Crabe est le reste de l'explosion d'une étoile arrivée en fin d'évolution : les couches extérieures de l'étoile ont formé la nébuleuse actuelle, alors que le noyau s'est contracté brutalement, pour former une étoile à neutrons qui rayonne ce qui lui reste d'énergie thermique. Cette étoile est un pulsar de très courte période (33 ms).

D.2.2 But du travail pratique

Deux photographies prises à plusieurs années d'intervalle montrent que la nébuleuse est en expansion, ce qui permet d'estimer son âge en supposant que toute la matière était condensée dans l'étoile centrale.

D.2.3 Dispositif expérimental

Établir l'échelle, en secondes d'arc par millimètre, de chacune des photographies, sachant que les deux étoiles repérées par des flèches sont distantes de 576".

D.2.4 Mesures

Identifier le pulsar sur les photographies (des deux étoiles centrales, c'est celle qui est au sud-ouest) et mesurer successivement les distances d'une douzaine de filaments par rapport à lui. Choisir des filaments bien répartis sur la périphérie de la nébuleuse.

D.2.5 Résultats

Faire un tableau où figureront pour chaque filament : la distance x_1 en $''$ de la première photographie, la distance x_2 en $''$ de la seconde photo, et le mouvement propre

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ où } \Delta x = x_2 - x_1 \; et \; \Delta t = 34{,}1\,\text{a}$$

A titre de contrôle, mesurer de la même manière la distance de quelques étoiles au pulsar, sur chaque photographie.

Porter sur un graphique v en fonction de x_2.

D.2.6 Analyse

Comment obtient-on l'âge de la nébuleuse ?

Des astronomes chinois du haut Moyen Âge ont signalé l'apparition, en l'année 1054, d'une étoile nouvelle (qui fut visible en plein jour pendant trois semaines !) dans la direction de la nébuleuse actuelle. La date est-elle compatible avec l'âge que vous avez trouvé ?

D.3 Le pendule simple

D.3.1 Les mesures

Une partie très importante du travail du physicien est de déterminer la (ou les) grandeur pertinente pour décrire le phénomène étudié.

Ici, on s'intéresse à la période du pendule, c'est-à-dire au temps qu'il met pour faire un aller-retour. Il s'agit de déterminer quelles variables (quels paramètres) pourraient influer cette grandeur. On peut citer entre autres la masse et la longueur du pendule, sa position initiale (l'angle du fil par rapport à la verticale), son poids, le fluide dans lequel il se trouve, etc. Tous ces paramètres n'ont pas forcément de liens avec la grandeur choisie pour décrire le phénomène. Dans un premier temps, on peut donc en éliminer certains qui paraissent en première approximation n'avoir aucun rôle, en raison des difficultés pour les mesurer, des impossibilités matérielles pour les déterminer ou du coût qu'ils engendrent. Bien entendu, il faut tenter de minimiser l'influence de paramètres que l'on ne pourrait prendre en considération pour diverses raisons tout en les sachant importants.

D'autre part, pratiquement, il est indispensable de réaliser l'expérience en ne faisant varier qu'un seul paramètre à la fois. Dans le cas présent, comme seules les variables masse, longueur et angle initial ont été choisies, il faut réaliser trois séries de mesures :

- la masse et la longueur restent constantes et on ne fait varier que l'angle,
- la masse et l'angle restent constants et on ne fait varier que la longueur,
- la longueur et l'angle restent constants et on ne fait varier que la masse.

Bien entendu, cette procédure a une répercussion sur l'organisation des données dont nous verrons quelques éléments par la suite.

Finalement, il faut relever deux choses. Premièrement, la nécessité d'évaluer l'incertitude des mesures. On peut procéder en effectuant une série de mesures avec strictement les mêmes paramètres. On prend ensuite le plus grand écart. Ce n'est pas très fiable mais constitue une bonne approximation. Secondement, il est important de relever le moindre petit problème survenu pendant les mesures. Un petit changement des conditions d'expérience pouvant avoir des répercussions non négligeables, il faut littéralement faire attention à tout.

D.3.2 Organisation des données et graphiques

L'objectif est avant tout la clarté. L'organisation des données repose sur une grandeur (la période d'oscillation T) et trois variables (la masse m, la longueur L et l'angle initial α). Il est fondamental d'étudier chacune de ces trois variables indépendamment. Pour cela on fixe une valeur pour les deux autres (en général la plus grande possible pour limiter les incertitudes, bien que pour l'angle initial il ne faudrait pas dépasser 15° pour que la théorie classique $T \approx \sqrt{L}$ soit valable) et on ne fait varier que celle qui est choisie. Ainsi, dans le cas du pendule, on est amené à construire trois tableaux : $T(m)$, $T(L)$ et $T(\alpha)$. Pour des raisons de clarté, on ne répète pas pour chaque mesure la valeur des variables fixées.

En ce qui concerne les graphes, comme la variable change pour chaque expérience, il faut aussi construire trois graphes qui correspondent aux trois tableaux précédents. On ne représente sur ceux-ci que les points effectivement mesurés. On ne relie donc jamais les points. Finalement, il ne faut pas oublier le titre, la date, le nom des grandeurs et les unités obligatoirement présents sur chaque graphe.

D.4 Mouvement simple : MRU

Il s'agit de tracer le graphe horaire de la position pour un mobile se déplaçant sur un rail avec différentes vitesses initiales et avec peu de frottements.

D.4.1 Les mesures

Les mesures sont celles du temps de parcours sur une distance donnée. Elles se réalisent avec deux cellules photoélectriques et un chronomètre. Il est important de soigner la réalisation : horizontalité du rail, détermination précise des longueurs, etc. Il faut aussi évaluer l'incertitude des mesures en répétant quelques mesures plusieurs fois.

D.4.2 Organisation des données et graphiques

C'est l'occasion de réaliser un tableau avec une seule variable : la distance parcourue et avec plusieurs grandeurs : le temps mis pour parcourir la distance avec diverses poussées : forte, moyenne et faible. Le fait que la variable soit commune à toutes les grandeurs (qui toutes représentent un temps) permet de ne réaliser qu'un seul graphique avec plusieurs courbes. Cela permet de mieux comparer les courbes et de montrer très clairement que plus la vitesse est grande plus la pente de la courbe est forte.

D.4.3 Analyse des résultats

Deux points sont essentiellement à relever :

— la pente du graphe horaire de la position représente la vitesse du mobile et le point où le graphe coupe l'axe de la position correspond à la position du mobile au moment où on enclenche le chronomètre et

— lorsque le frottement est important le graphe n'est pas linéaire (ou affine), mais sa pente diminue progressivement, indiquant une diminution de vitesse.

D.5 Mouvement simple : MRUA

D.5.1 But

Il s'agit de tracer le graphe horaire de la position d'un mobile descendant un rail incliné selon différentes pentes et avec peu de frottements.

Il s'agit aussi de trouver deux théories permettant de calculer l'accélération du mobile et de les

comparer à une accélération expérimentale obtenue à partir des mesures.

D.5.2 Théorie

Pour déterminer l'accélération d'un mobile sur un plan incliné, on peut suivre deux raisonnements.

1. On peut établir une simple relation linéaire entre l'angle du plan et l'accélération. En effet, sachant que l'accélération d'un objet en chute libre vaut $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, on peut faire les correspondances suivantes : $0° \Rightarrow 0\,\mathrm{m/s^2}$ et $90° \Rightarrow 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$
   Cela mène à la relation suivante :
   $$a = g \cdot \alpha/90$$
2. On peut considérer que l'accélération du mobile qui descend le long du rail incliné est la composante le long de ce plan du vecteur correspondant à l'accélération du mobile en chute libre. Il s'agit donc de projeter le vecteur $\overrightarrow{g}$ de norme $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ perpendiculairement au plan incliné. La figure représentant cette projection est un triangle rectangle d'hypoténuse g et de côté adjacent a recherché. On obtient donc la relation suivante :
   $$a = g \cdot \sin(\alpha)$$
   .

D.5.3 Les mesures

Les mesures sont celles du temps parcouru sur une distance donnée. Elles se réalisent avec deux cellules photoélectriques et un chronomètre. Pour obtenir l'accélération expérimentale, on se place dans le cas d'un MRUA de vitesse initiale nulle. Il est donc nécessaire de lâcher le mobile et de veiller à ne pas le lancer.

D.5.4 Organisation des données et graphiques

On réalise un tableau avec une variable et deux grandeurs : la distance parcourue, le temps correspondant et l'accélération expérimentale. On peut alors comparer par un écart la moyenne des accélérations expérimentales, obtenues grâce à l'hypothèse d'un MRUA qui nous permet d'écrire $a_{exp} = 2 \cdot d/t^2$, pour chaque pente et chaque valeur d'accélération obtenue théoriquement.

La comparaison montre clairement que la dépendance sinusoïdale est réalisée.

D.5.5 Galilée et le plan incliné

C'est un mouvement chargé d'histoire puisque Galilée l'étudia de manière approfondie pour en déduire que la distance parcourue par un objet en MRUA est proportionnelle au temps de parcours au carré.

L'idée était simple. Le mouvement de chute libre étant trop rapide pour pouvoir être aisément étudié, il faut le ralentir par un plan incliné. Cela amena Galilée à découvrir la relation entre la distance parcourue et le temps mis pour le faire par un mobile en mouvement rectiligne uniformément accéléré et plus particulièrement par un mobile en chute libre.

D.6 La chute libre

D.6.1 Cette expérience donnant lieu à un rapport noté, elle n'est pas décrite.

D.6.2 Résultats

Trois résultats importants concluent cette expérience :

— l'accélération d'un objet en chute libre est constante (c'est un MRUA),
— cette accélération vaut $a = g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$,
— cette accélération est indépendante de la masse de l'objet.

D.7 Le canon horizontal

C'est une expérience dont le but est très simple. Avec un petit canon horizontal à ressort, il s'agit de tirer une bille du haut d'une table. On doit auparavant déterminer par calcul le lieu exact d'impact au sol. C'est une application des lois de la balistique. Au départ, on ne s'autorise que des tirs verticaux. Ainsi on peut déterminer la vitesse de la bille à la sortie du canon. En faisant l'hypothèse qu'elle ne change pas lors d'un tir horizontal, on peut alors déterminer le point d'impact au sol. En effet, à l'aide

de la hauteur à laquelle se trouve le canon par rapport au sol, on peut déterminer le temps de chute vertical de la bille. On utilise pour cela l'équation horaire de la position d'un objet en chute libre de vitesse initiale (verticale) nulle. Puis, on peut déterminer la distance horizontale parcourue en considérant un même temps pour le vol parabolique et le mouvement horizontal à vitesse constante. Celle-ci correspondant à la vitesse de sortie du canon précédemment calculée. Dans le détail, on a :

Tir vertical. C'est un MRUA d'accélération terrestre, pour lequel on peut poser :

$$v^2 = v_o^2 - 2 \cdot g \cdot h \;\Rightarrow\; v_o = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

car la vitesse au sommet de la trajectoire est nulle.

MRU et MRUA. Verticalement, on a un MRUA d'équation :

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

Et horizontalement, on a un MRU d'équation :

$$d = v_o \cdot t$$

Soit, en combinant les deux :

$$d = v_o \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

Cette expérience peut aussi se faire à l'aide de l'énergie. En effet, pour déterminer la vitesse de la bille à la sortie du canon, on peut mesurer la hauteur maximale qu'elle va atteindre et poser que l'énergie cinétique à la sortie du canon se transforme intégralement en énergie potentielle. Ainsi, on peut poser :

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_o^2 = m \cdot g \cdot h \;\Rightarrow$$
$$v_o = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Ce qui correspond à la vitesse qu'on peut trouver de manière cinématique.

D.8 Le chariot à masse pendante

L'idée est d'accélérer un chariot au moyen d'une masse suspendue. Il se déplace sur un rail horizontal avec peu de frottements. La masse pendante y est attachée à l'aide d'une petite ficelle. Une poulie permet de faire descendre la masse tout en tirant le chariot horizontalement. On fait varier la masse pendante pour obtenir différentes accélérations. C'est une expérience portant sur la seconde loi de Newton. Elle est intéressante si on laisse l'expérimentateur construire sa propre théorie menant à l'accélération du système chariot-masse pendante. Il est alors possible de comparer une théorie construite de toute pièce (sur la base de la seconde loi de Newton) avec les résultats expérimentaux. Ceux-ci sont obtenus à partir de l'hypothèse d'un MRUA à l'aide de l'équation de la position utilisée avec une vitesse initiale nulle. Une série de mesures de diverses distances parcourues en fonction du temps, permet de trouver l'accélération.

Le résultat ne sera pas explicité ici puisqu'il permettrait de découvrir la bonne théorie, ce qui n'est pas l'objectif recherché.

Annexe E

Rotations

L'objectif de cette annexe est de prendre conscience des mouvements auxquels nous participons sans même le savoir. Il est aussi de se rendre compte que les vitesses qui leur correspondent sont difficilement imaginables et plus, elles sont relatives et il est parfois difficile de savoir par rapport à quoi les décrire.

Ces mouvements sont cependant assez bien connus pour qu'on puisse prévoir le futur proche de notre position dans l'espace.

E.1 Rotation de la Terre sur elle-même

On se propose de calculer la vitesse de rotation d'un point à l'arrêt sur l'équateur terrestre.

Le calcul est simple. Il se base sur les données suivantes :

- le rayon de la Terre à l'équateur vaut : $R_T = 6{,}378 \cdot 10^6$ m et
- la période sidérale de rotation de la Terre sur elle-même vaut : $T_s = 23\,h\,56\,mn\,4,1\,s = 86\ 164{,}1$ s

Le calcul est celui de la vitesse d'un corps en rotation sur un cercle de rayon et de période donnés. On a :

$$\begin{aligned} v = \frac{d}{t} &= \frac{2 \cdot \pi \cdot R_T}{T_s} \\ &= \frac{2 \cdot \pi \cdot 6,378 \cdot 10^6}{86'164,1} \\ &= 465{,}1\,\text{m/s} = 1674\,\text{km/h} \end{aligned}$$

A elle seule, cette vitesse est déjà fantastique. Nous ne la ressentons pas ou peu à cause de l'inertie.

E.2 Rotation de la Terre autour du Soleil

On se propose de calculer la vitesse de rotation de la Terre autour du Soleil.

Le calcul est simple. Il se base sur les données suivantes :

- la distance de la Terre au Soleil vaut environ : $R_{T\to S} = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m et
- la période sidérale de rotation de la Terre autour du Soleil vaut : $T_s = 365{,}263\,\text{d} = 31{,}559 \cdot 10^6$ s

Le calcul est celui de la vitesse d'un corps en rotation sur un cercle de rayon et de période donnés. On a :

$$\begin{aligned} v = \frac{d}{t} &= \frac{2 \cdot \pi \cdot R_{T\to S}}{T_s} \\ &= \frac{2 \cdot \pi \cdot 1,496 \cdot 10^{11}}{31,559 \cdot 10^6} \\ &= 29\ 784{,}4\,\text{m/s} = 107\ 224\,\text{km/h} \end{aligned}$$

Cette vitesse est encore plus fantastique. Nous ne la ressentons à nouveau pas ou peu à cause de l'inertie.

Ce qui vient d'être dit montre qu'il est important de préciser *par rapport à quoi* on observe le mouvement. Historiquement cette question a pris beaucoup d'importance lors de la mise en question de l'immobilité de la Terre. En effet, si pendant

longtemps l'idée que la Terre tourne autour du Soleil a paru absurde, aujourd'hui elle est évidente. Et au contraire, c'est l'idée qu'on puisse considérer que le Soleil tourne autour de la Terre qui est devenue absurde. A tel point qu'on envisage même plus qu'on puisse l'affirmer effectivement. Or, la relativité des mouvements permet de dire à juste titre que le Soleil tourne autour de la Terre pour autant qu'on observe le mouvement depuis celle-ci. La Terre tourne autour du Soleil par rapport au Soleil et le Soleil tourne autour de la Terre par rapport à la Terre. Ce que Galilée lui-même, dans son "Dialogue sur les deux grands systèmes du monde", a exprimé par :

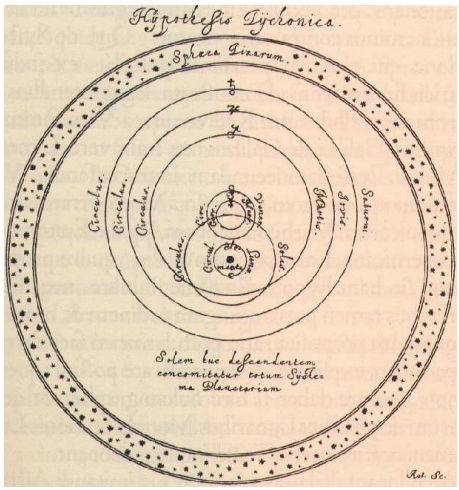
> "*Les choses reviennent au même si la Terre seule se meut alors que tout le reste de l'Univers est immobile ou si, alors que la Terre seule est immobile, tout l'Univers se meut d'un même mouvement*" [a]
>
> (Robredo, 2007, p. 60, sans référence à la page originale.)

Qu'en est-il alors de la fameuse question historique de l'immobilité de la Terre ? Celle-ci révèle, en réalité, deux problèmes qui ne remettent pas en cause la possibilité d'une description relative des mouvements du Soleil et de la Terre.

Le premier problème se traduit dans l'immobilité de la Terre *dans l'univers*. C'est un problème autant cosmologique que physique. Cosmologique, car il met en cause une vision de l'univers historique et religieuse qui dépasse clairement la simple relativité des mouvements. Physique, car il met en jeu la question de l'inertie qui elle aussi dépasse le cadre de la relativité des mouvements. Nous n'en discuterons pas ici en raison de sa complexité, mais on peut relever qu'elle n'empêche nullement d'affirmer que le Soleil tourne autour de la Terre.

Le second problème tient dans la cinématique des planètes du système solaire. Il est aujourd'hui incontestable que les planètes tournent autour du Soleil selon des orbites elliptiques et non, comme l'envisageait Ptolémée, autour de la Terre. Car le modèle utilisé à l'époque, qui faisait tourner les planètes autour de la Terre et sur des épicycles [b] pour expliquer leur rétrogradation [c] dans le ciel, est clairement faux. Les observations, notamment celle de l'orbite de Mars, l'invalident. Mais, il n'est pas faux en raison de l'affirmation de la rotation du Soleil autour de la Terre, mais en raison de celle de la rotation des planètes autour de la Terre sur des cercles avec des épicycles.

Figure E.1 – *Le système géocentrique de Tycho Brahé*
Un modèle encore actuel[61].



Cette erreur, qui est celle du modèle de Ptolémée, si elle est bien une erreur, n'empêche pas qu'on puisse considérer que le Soleil tourne autour de la Terre, *vu depuis la Terre*. Elle fut d'ailleurs reconnue et corrigée par Tycho Brahé qui proposa un modèle (voir figure E.1) où la Terre restait fixe dans l'univers, où le Soleil tournait autour d'elle et les autres planètes tournaient autour... du Soleil. Ce modèle, excepté la fixité de la Terre dans l'univers qui relève du premier problème énoncé ci-dessus, est parfaitement valide. Il s'agit tout simplement de la vision du système solaire *relativement à la Terre*. Et la description actuelle des mouvements célestes vu depuis la Terre adopte un point de vue

a. On trouve dans (Galilei, 1992, p. 274) le texte suivant :

> "*si la Terre est immobile, il faut que le Soleil et les étoiles fixes se meuvent, mais il se peut aussi que le Soleil et les fixes soient immobiles si c'est la Terre qui se meut.*"

b. Les épicycles sont de petits cercles dont le centre tourne sur un plus grand cercle, le déférent, centré sur la Terre. Les planètes tournent sur les épicycles qui eux-mêmes tournent autour de la Terre.

c. La rétrogradation est le fait que les planètes plus éloignées du Soleil que la Terre, semblent parfois, vu depuis la Terre, revenir en arrière dans le ciel par rapport aux étoiles fixes.

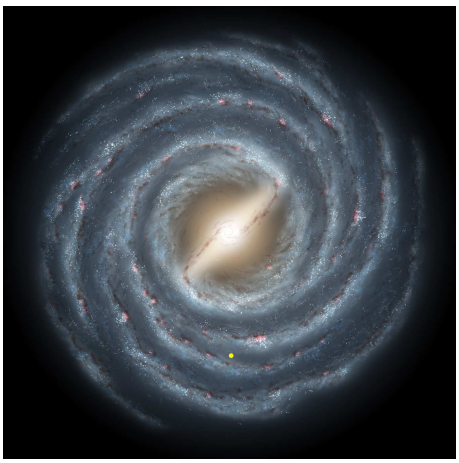
très proche de celui de Tycho Brahé, exception faite des orbites circulaires qui sont devenues des ellipses.

E.3 Rotation du Soleil dans la Voie Lactée

On se propose de calculer la vitesse de rotation du Soleil dans notre galaxie, la Voie Lactée.

La figure E.2 présente une vue d'artiste de la Voie Lactée telle qu'on se la représente. La position du Soleil y figure sous la forme d'un point jaune.

Figure E.2 – *Le soleil dans la Voie Lactée*
Représentation artistique[62]



Le calcul est simple. Il se base sur les données suivantes :

- la distance du Soleil au centre de la galaxie vaut environ : $R_{S\to G} = 26\,000\,\text{AL}$ et
- la période sidérale de rotation du Soleil autour du centre de la galaxie vaut environ : $T_s = 220 \cdot 10^6\,\text{a}$

On calcule le nombre de secondes que représentent 220 millions d'années :

$$\begin{aligned} 220 \cdot 10^6\, ans &= 220 \cdot 10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \\ &= 6{,}937 \cdot 10^{15}\,\text{s} \end{aligned}$$

Pendant ce temps, le Soleil fait un cercle de rayon 26 000 AL. La distance qu'il parcourt vaut donc :

$$d = 2 \cdot \pi \cdot 26'000 \cdot 9,4608 \cdot 10^{15} = 1{,}546 \cdot 10^{21}\,\text{m}$$

car, comme la vitesse de la lumière vaut 300 000 km/s, on a :

$$1\,AL = 300'000'000 \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365 = 9{,}4608 \cdot 10^{15}\,\text{m}$$

Le calcul est alors celui de la vitesse d'un corps en rotation sur un cercle de rayon et de période donnés. On a :

$$\begin{aligned} v &= \frac{d}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_{S\to G}}{T_s} \\ &= \frac{1{,}546 \cdot 10^{21}}{6{,}937 \cdot 10^{15}} \\ &= 222\,863\,\text{m/s} = 222{,}863\,\text{km/s} = 222{,}863 \cdot 3600 \\ &= 802\,306\,\text{km/h} \end{aligned}$$

Cette vitesse est incroyable. Nous ne la ressentons à nouveau pas ou peu toujours à cause de l'inertie.

Notons que cette vitesse est la même pour toutes les étoiles proches du Soleil qui participent au mouvement de rotation autour du centre de la galaxie. Mais le Soleil a aussi un mouvement propre, c'est-à-dire qu'une partie de sa vitesse ne correspond pas à sa vitesse de rotation autour du centre de la galaxie. Cette composante vaut environ 20 km/s.[63]

Relevons enfin une règle bien pratique pour la transformation d'unité entre les m/s et les km/h. On a en effet :

$$1\,\text{km/h} = \frac{1\,km}{1\,h} = \frac{1000\,m}{3600\,s} = 1/3{,}6\,\text{m/s}$$

Ainsi, pour transformer des km/h en m/s, il faut diviser le nombre correspondant aux km/h par le facteur 3,6. Inversement, pour passer de m/s en km/h, il faut multiplier les m/s par 3,6.

E.4 Vitesse et référentiel

La question de savoir par rapport à quoi on calcule la vitesse se pose donc puisque les différentes vitesses calculées précédemment constituent chacune une partie de la vitesse d'un point fixe à l'équateur terrestre. Toutes ces vitesses sont donc relatives à des référentiels différents.

Par exemple, la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même est calculée dans un référentiel lié à la Terre, au centre de celle-ci, mais ne tournant pas par rapport à elle. Il peut être fixé sur des étoiles proches qui, à l'échelle de la période de rotation de la Terre, ne se déplacent pratiquement pas.

Pour évaluer la vitesse caractéristique du mouvement propre du Soleil dans la galaxie, mouvement auquel on a soustrait celui de rotation du Soleil autour du centre de la galaxie, il faut utiliser un référentiel dit LSR pour Local Standard of Rest, c'est-à-dire un référentiel standard local de repos. Celui-ci a été construit à l'aide des vitesses et positions moyennes des étoiles proches du Soleil. Celles-ci sont donc statistiquement au repos dans le référentiel LSR. C'est ainsi qu'on peut étudier le mouvement propre du Soleil.

En conclusion, on voit qu'il est indispensable de toujours rapporter un mouvement à un référentiel pour que la vitesse associée ait du sens.

Cependant, on sait aujourd'hui qu'il n'existe pas de référentiel absolu auquel tout mouvement pourrait être rapporté. Newton a cru en l'existence d'un tel référentiel, Einstein, dans la relativité restreinte et à l'aide des expériences de Michelson et Morley, a démontré qu'il n'en existait pas. Un mouvement est donc nécessairement toujours rapporté à un autre corps qui tient lieu de référentiel.

Annexe F

MRUA développements

F.1 La position

Pour un MRUA, la position est donnée par :

$$\boxed{x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_o \cdot t + x_o} \qquad \text{(F.1)}$$

Démonstration :
Par définition la vitesse moyenne est :

$$\overline{v} = \frac{x - x_o}{t} \;\Rightarrow\; x = \overline{v} \cdot t + x_o$$

Mais, la vitesse moyenne peut aussi s'exprimer par :

$$\overline{v} = \frac{v + v_o}{2}$$

Ainsi, on a :

$$x = \overline{v} \cdot t + v_o = \frac{v + v_o}{2} \cdot t + x_o$$

Or, par définition de l'accélération (constante) :

$$\overline{a} = a_o = \frac{v - v_o}{t} \;\Rightarrow\; v = a_o \cdot t + v_o$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} x &= \frac{v + v_o}{2} \cdot t + x_o = \frac{a_o \cdot t + v_o + v_o}{2} + x_o \\ &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_o \cdot t + x_o \end{aligned}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Figure F.1 – Discours concernant deux sciences nouvelles *de Galilée*
Discours dans lesquels Galilée présente ses expériences sur la chute des corps et fonde la mécanique. Il tente aussi d'y créer une science de la résistance des matériaux[64]

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue ſcienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filoſofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Soldi.
IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſeuirii. M. D. C. XXXVIII.

F.2 Une autre relation bien pratique

F.2.1 Cinématique

Jusqu'à présent, les relations obtenues (la vitesse et la position) sont fonctions du temps. Il est néanmoins pratique dans bien des cas de disposer d'une relation où le facteur temps n'apparaît pas. Cette relation est facilement obtenue en éliminant le temps des deux équations de la vitesse et de la position. Pour le calcul on part de équations du MRUA suivantes :

$$v = a_o \cdot t + v_o$$
$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_o \cdot t + x_o$$

Elles constituent généralement un système de deux équations à deux inconnues, dont le temps t est l'une d'elles. Pour résoudre ce système et éliminer le temps par substitution, on tire t de la première équation :

$$t = \frac{v - v_o}{a_o}$$

et on le remplace dans la seconde (faire le contraire est aussi réalisable, mais mathématiquement plus complexe) :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \cdot a_o \cdot (\frac{v - v_o}{a_o})^2 + v_o \cdot \frac{v - v_o}{a_o} + x_o \\ &= \frac{1}{2} \cdot a_o \cdot \frac{(v - v_o)^2}{a_o^2} + v_o \cdot \frac{v - v_o}{a_o} + x_o \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2 - 2 \cdot v \cdot v_o + v_o^2}{a_o} + \frac{v \cdot v_o - v_o^2}{a_o} + x_o \\ &= \frac{v^2 - 2 \cdot v \cdot v_o + v_o^2 + 2 \cdot v \cdot v_o - 2 \cdot v_o^2}{2 \cdot a_o} + x_o \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; x = \frac{v^2 - v_o^2}{2 \cdot a_o} + x_o \; \Rightarrow$$

$$\boxed{v^2 = v_o^2 + 2 \cdot a_o \cdot (x - x_o)} \qquad \text{(F.2)}$$

Cette relation est indépendante du temps t. Elle est canoniquement présentée sous cette forme.

F.2.2 Énergie

Il faut relever que la relation F.2 peut aussi être obtenue grâce au théorème de conservation de l'énergie. En effet, imaginons un objet de masse m à une hauteur h qu'on lance à une vitesse v_o vers le bas. Son énergie cinétique initiale est non nulle, de même que son énergie potentielle initiale. Son énergie potentielle finale est nulle. Par contre, son énergie cinétique finale ne l'est pas. Par conservation de l'énergie, on peut écrire :

$$E^i_{cin} + E^i_{pot} = E^f_{cin} + E^f_{pot} \; \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_o^2 + m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \; \Rightarrow$$
$$v^2 = v_o^2 + 2 \cdot g \cdot h$$

Soit, de manière plus générale, en posant $g = a$ et $h = x - x_o$, ce qu'il fallait démontrer :

$$\boxed{v^2 = v_o^2 + 2 \cdot a_o \cdot (x - x_o)}$$

Annexe G

Chute de la Lune

G.1 Introduction

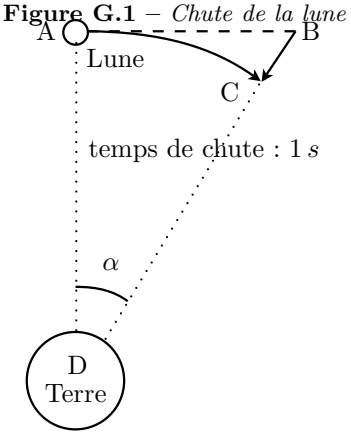
Le calcul ci-dessous constitue une approche simplifiée du calcul de l'accélération de la Lune basé sur sa chute libre sur la Terre. Il est valable dans la mesure d'un angle α très petit. Dans le cas d'un mouvement de rotation de la Lune autour de la Terre d'une durée d'une seconde, il est donc justifié. Mais cela n'enlève rien à la généralité du raisonnement puisque celui-ci est valable pour tout temps petit.

G.2 Accélération

Considérons la figure G.1 qui décrit successivement le mouvement en ligne droite d'une Lune qui n'est pas soumise à l'attraction de la Terre, puis sa chute libre vers la Terre pendant le même temps de 1 s. Le mouvement de rotation circulaire de la Lune autour de la Terre est ainsi compris comme un mouvement simultanément balistique (MRU sur AB et MRUA sur BC) et central puisque BC a la direction Terre-Lune. Il s'agit donc d'un modèle plus juste, mais plus complexe, que celui présenté au paragraphe 2.7.

Pythagore et la géométrie évidente du problème

Figure G.1 – *Chute de la lune*



présenté dans la figure G.1 permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{AD^2 + AB^2} - CD \\ &= \sqrt{AD^2 + AB^2} - AD \\ &= \sqrt{AD^2 \cdot (1 + \frac{AB^2}{AD^2})} - AD \\ &= AD \cdot \sqrt{1 + (\frac{AB}{AD})^2} - AD \end{aligned}$$

Il faut maintenant faire appel à une opération mathématique qui consiste à traduire une fonction complexe comme la racine carrée en une somme infinie de termes simples. Il s'agit d'un développement limité. Dans le même temps, pour ne pas devoir traiter une somme infinie, il faut effectuer une approximation qui va permettre de ne garder que quelques termes de cette somme. Cette simplification est justifiée par la petitesse du terme AB comparé à la distance Terre-Lune AD. Plus préci-

sément, on a alors :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{2\cdot 4}\cdot x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot x^3 - \dots$$

pour $|x| \ll 1$. L'approximation consiste à ne retenir que les deux premiers termes :

$$\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{1}{2}\cdot x$$

Ainsi, en raison du fait que :

$$(\frac{AB}{AD})^2 \ll 1$$

on peut écrire, à fortiori, la suite du calcul précédent :

$$\begin{aligned} BC &= AD\cdot\sqrt{1+(\frac{AB}{AD})^2} - AD \\ &= AD\cdot(1+\frac{1}{2}\cdot(\frac{AB}{AD})^2) - AD \\ &= AD + AD\cdot\frac{1}{2}\cdot(\frac{AB}{AD})^2 - AD \\ &= AD\cdot\frac{1}{2}\cdot(\frac{AB}{AD})^2 \end{aligned}$$

Or, on peut calculer la vitesse angulaire sur un temps de 1 s par :

$$\omega(t = 1\,s) = \frac{\alpha}{t} = \frac{\alpha}{1} = \alpha$$

En considérant un angle α petit, on a d'autre part :

$$\alpha \cong \tan(\alpha) = \frac{AB}{AD}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\omega = \frac{AB}{AD}$$

En remplaçant AD par $d_{Terre-Lune}$, on peut finalement trouver BC :

$$BC = d_{Terre-Lune}\cdot\frac{1}{2}\cdot\omega^2 \qquad \text{(G.1)}$$

Mais, si on fait l'hypothèse d'une chute libre de la Lune en MRUA pendant une seconde, on a :

$$BC = \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 = \frac{1}{2}\cdot a \qquad \text{(G.2)}$$

Si on considère maintenant le mouvement de rotation de la Lune pendant une période T, soit pendant 27,33 jours, sur un tour $(2\cdot\pi\,rad)$ autour de la Terre, on peut écrire :

$$\omega = \frac{2\cdot\pi}{T}$$

Et en réunissant alors les équations G.1 et G.2, on a :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\cdot a = \frac{1}{2}\cdot d_{Terre-Lune}\cdot\omega^2 \;\Rightarrow \\ &\quad a = d_{Terre-Lune}\cdot\omega^2 = d_{Terre-Lune}\cdot(\frac{2\cdot\pi}{T})^2 \\ &\quad = 3,844\cdot 10^8\cdot(\frac{2\cdot\pi}{27,33\cdot 24\cdot 3600})^2 \\ &\quad = 2{,}72\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2} = 2{,}72\,\mathrm{mm/s^2} \end{aligned}$$

On peut comparer cette valeur à la valeur exacte donnée à la fin du paragraphe 2.5.5 :

$$a = 2{,}7\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$$

G.3 Force de gravitation

On peut aller plus loin en déterminant le rapport r de l'accélération de la lune à l'accélération terrestre :

$$r = \frac{g}{a} = \frac{9,81}{2,72\cdot 10^{-3}} = 3607$$

et en remarquant que c'est précisément le rapport des carrés des distances $d_{Terre-Lune}$ et R_{Terre} :

$$r = \frac{d^2_{Terre-Lune}}{R^2_{Terre}} = \frac{(3,844\cdot 10^8)^2}{(6,371\cdot 10^6)^2} = 3640$$

La conséquence en est que l'accélération due au poids est inversement proportionnelle au carré de la distance. Comme $F = m\cdot a$, la force de gravitation est aussi inversement proportionnelle au carré des distances :

$$F \sim \frac{1}{r^2}$$

On voit apparaître là la loi de la gravitation universelle.

Annexe H

Satellite en orbite géostationnaire

H.1 Introduction

Un exemple intéressant de l'utilisation de la seconde loi de Newton, du mouvement circulaire uniforme et de la loi de la gravitation universelle, est donné par le calcul de l'altitude nécessaire pour qu'un satellite soit en orbite géostationnaire.

H.2 Théoriquement

On va donc utiliser les équations suivantes :

$F = m \cdot a$	: seconde loi de Newton
$a = \frac{v^2}{R}$	: mouvement circulaire uniforme
$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$	: loi de la gravitation universelle

De ces trois lois, on tire :

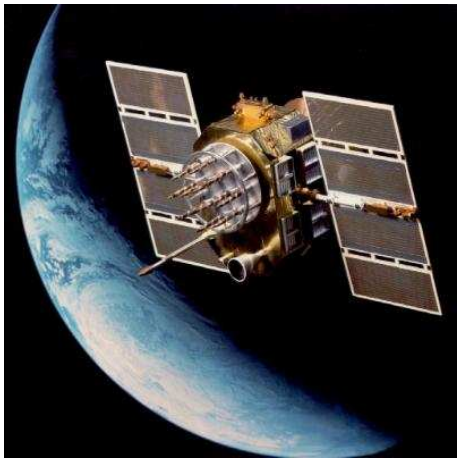
$$G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{(R_T + h)^2} = m_s \cdot \frac{v^2}{(R_T + h)}$$

où :
- G est la constante de la gravitation universelle,
- M_T est la masse de la Terre,
- m_s est la masse du satellite,
- R_T est le rayon de la Terre,
- h est l'altitude du satellite et
- v est la vitesse linéaire du satellite.

Avec, par définition de la vitesse, pour une trajectoire circulaire :

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R_T + h)}{T} \qquad \text{(H.1)}$$

Figure H.1 – *Satellite*
En orbite géostationnaire[65]



où : T est la période du mouvement, c'est à dire le temps que doit mettre le satellite pour faire un tour autour de la Terre.

De là on tire (faites les calculs vous-même) :

$$h = (\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2})^{\frac{1}{3}} - R_T$$

H.3 Numériquement

Le calcul est simple :

$$h = (\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot (24 \cdot 60 \cdot 60)^2}{4 \cdot \pi^2})^{\frac{1}{3}} - 6,37 \cdot 10^6 = 35\ 857\,\text{km}$$

Il s'agit de l'altitude des satellites en orbite géostationnaire au-dessus de l'équateur. Pour des latitudes plus élevées, on comprend bien que plus on monte vers le pôle, plus le satellite sera bas sur l'horizon. Il se peut même qu'ils soient sous l'horizon. C'est pourquoi d'autres types d'orbites sont nécessaires, comme l'orbite de Molniya, qui permet de couvrir à l'aide de plusieurs satellites les régions polaires vingt-quatre heures sur vingt-quatre.

L'équation H.1 permet alors de déterminer la vitesse du satellite sur son orbite. Pour un rayon de la terre $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6\,\text{m}$ et une altitude $h = 35{,}857 \cdot 10^6\,\text{m}$, on a :

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot (6,37 \cdot 10^6 + 35,857 \cdot 10^6)}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 3071\,\text{m/s} \cong 3\,\text{km/s} \cong 11\ 055\,\text{km/h}$$

H.4 Loi de Kepler

Une autre manière de parvenir au même résultat consiste à utiliser la troisième loi de Kepler et la lune. En effet, selon l'équation 2.16 de la page 49, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{R_{terre-lune}^3}{T_{lune}^2} = \frac{(R_T + h)^3}{T_{sat}^2} \Rightarrow \\ R_T + h &= R_{terre-lune} \cdot \sqrt[3]{\frac{T_{sat}^2}{T_{lune}^2}} \\ &= 384'404 \cdot \sqrt[3]{\frac{24^2}{(27 \cdot 24 + 8)^2}} \\ &= 42\ 364\,\text{km} \Rightarrow \\ h &= 42'364 - R_T = 35\ 993\,\text{km} \end{aligned}$$

Et on retrouve (aux arrondis près) le même résultat que précédemment.

Annexe I

Relativité

La notion de relativité est entourée d'une aura particulière. Elle évoque immanquablement Einstein et des idées entourées de mystère comme la dilatation du temps ou la courbure de l'espace. Même si cette notion se comprend de nos jours à travers les relativités restreinte et générale d'Einstein, elle est déjà présente chez Bruno au XVI^e siècle et Galilée au XVII^e siècle. On parle aujourd'hui de relativité galiléenne pour faire la différence avec celles d'Einstein. Dans tous les cas, cette notion nous mène à considérer des changements de référentiels et à étudier le changement de forme des lois de la physique à travers ceux-ci. Sans aborder les relativités restreinte et générale d'Einstein, qui traitent des lois de l'électromagnétisme et de la gravitation à travers ces changements de référentiels, on va s'intéresser ici à la notion de relativité galiléenne et à ses implications pour la physique newtonienne.

I.1 Relativité galiléenne

Deux textes historiques fondent l'idée de relativité. Le plus connu est celui de Galileo Galilei (Galilée) :

> "*Enfermez-vous avec un ami dans la cabine principale à l'intérieur d'un grand bateau et prenez avec vous des mouches, des papillons et d'autres petits animaux volants. Prenez une grande cuve d'eau avec un poisson dedans, suspendez une bouteille qui se vide goutte à goutte dans un grand récipient en dessous d'elle. Avec le bateau à l'arrêt, observez soigneusement comment les petits animaux volent à des vitesses égales vers tous les côtés de la cabine. Le poisson nage indifféremment dans toutes les directions, les gouttes tombent dans le récipient en dessous, et si vous lancez quelque chose à votre ami, vous n'avez pas besoin de le lancer plus fort dans une direction que dans une autre, les distances étant égales, et si vous sautez à pieds joints, vous franchissez des distances égales dans toutes les directions. Lorsque vous aurez observé toutes ces choses soigneusement (bien qu'il n'y ait aucun doute que lorsque le bateau est à l'arrêt, les choses doivent se passer ainsi), faites avancer le bateau à l'allure qui vous plaira, pour autant que la vitesse soit uniforme [c'est-à-dire constante] et ne fluctue pas de part et d'autre. Vous ne verrez pas le moindre changement dans aucun des effets mentionnés et même aucun d'eux ne vous permettra de dire si le bateau est en mouvement ou à l'arrêt ...*" Galileo Galilei, dans "Dialogue concernant les deux plus grands systèmes du monde", deuxième journée, 1632.
> (Gruber, 1988, p. 400.)

Galilée décrit tout d'abord un changement de référentiel particulier. Il s'agit de passer d'un lieu immobile sur la terre ferme à la cabine d'un navire se déplaçant uniformément, c'est-à-dire à vitesse constante. Il n'est donc pas question d'un référentiel en accélération par exemple. On parlera donc de relativité restreinte. Puis, Galilée compare les mouvements dans ces deux référentiels et conclut

qu'il n'y a pas de moyens de les différencier. L'explication actuelle complète et étend ce résultat qui constitue l'idée de relativité. Elle s'exprime par :

> Les lois de la physique sont formellement les mêmes dans deux référentiels en translation à vitesse constante l'un par rapport à l'autre.

Cette idée, au contraire de dire que "tout est relatif", affirme que la forme des lois de la physique est préservée par ce type de changement de référentiel. Elle en assure la généralité pour des observateurs en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Le texte le plus ancien formulant clairement l'idée de relativité à pour auteur Giordano Bruno.

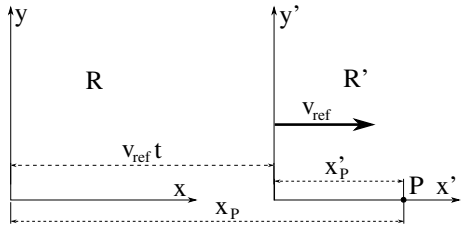
> "*Si nous supposons une personne sur un bateau en mouvement au milieu des flots, celui qui ne sait pas que l'eau est en mouvement et qui ne voit pas la terre ferme, ne sera pas conscient du mouvement du bateau . Pour cette raison, j'en viendrai à mettre en doute la quiétude et la fixité de notre Terre. Et je suis en mesure de croire que si j'étais sur le Soleil, la Lune ou sur une autre étoile, je m'imaginerais toujours au centre du monde sans mouvement autour duquel semblerait tourner l'univers entier, bien qu'en vérité le corps contenant sur lequel je me trouve serait en train de tourner sur lui-même. Ainsi je ne puis en rien être certain de ce qui distingue un corps mobile d'un corps stable.*" Giordano Bruno, dans "L'Infini, l'univers et les mondes", troisième dialogue, 1584.
>
> (Rocchi, 2000, p. 170.)

Bruno, bien avant Galilée avait posé très clairement les bases du principe de relativité. Et Bruno alla plus loin que Galilée en postulant la pluralité des mondes. Cela lui coûta la vie puisqu'il fut brûlé vif en 1600.

I.2 Transformation galiléenne

Le changement de référentiel sur lequel se base la relativité restreinte de Galilée (ou de Bruno) a de nos jours une formulation mathématique précise. Pour la découvrir, considérons la figure I.1 qui

Figure I.1 – *Transformation de Galilée*
Selon l'axe x.



présente deux référentiels R et R' dont l'un, R', se déplace en ligne droite à vitesse constante v_{ref} par rapport à l'autre. Pour simplifier les calculs, le déplacement de R' se fait selon l'axe x du référentiel R.

On peut donner la position du point P dans chaque référentiel à l'aide des coordonnées x et x'. Si on admet, pour simplifier, que les deux référentiels avaient à $t = 0\,\mathrm{s}$ la même origine, la position de l'origine du référentiel R' à un instant t par rapport à R vaut alors $v_{ref} \cdot t$. On peut alors écrire pour le point P :

$$\boxed{x' = x - v_{ref} \cdot t} \tag{I.1}$$

L'équation I.1 constitue la transformation de Galilée, sous sa forme la plus simplifiée. Il faut cependant lui ajouter une équation ici évidente :

$$t' = t$$

qui postule l'invariance du temps par changement de référentiel.

On peut déduire de l'équation I.1 un corollaire important : le théorème d'addition des vitesses. Considérons le déplacement du point P le long de l'axe x. Notons x_f la position finale et x_i la position initiale du point P. En notant v la vitesse du point P, en utilisant le ' pour les grandeurs dans le référentiel R' et avec la transformation de Galilée, on a :

$$\begin{aligned} v' &= \frac{x'_f - x'_i}{t'_f - t'_i} = \frac{(x_f - v_{ref} \cdot t_f) - (x_i - v_{ref} \cdot t_i}{t_f - t_i} \\ &= \frac{x_f - x_i - v_{ref} \cdot (t_f - t_i)}{t_f - t_i} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} - v_{ref} \\ v' &= v - v_{ref} \end{aligned} \tag{I.2}$$

L'expression I.2 constitue le théorème d'addition des vitesses. Il traduit l'idée que la vitesse d'un point P dans le référentiel R' correspond à sa vitesse dans le référentiel R à laquelle on soustrait la vitesse du référentiel R' lui-même. Plus simplement, en inversant l'équation I.2, on a :

$$\boxed{v = v' + v_{ref}} \tag{I.3}$$

L'équation I.3 se comprend ainsi : par rapport au sol, la vitesse du passager d'un train correspond à sa vitesse par rapport au train à laquelle on ajoute la vitesse du train lui-même (par rapport au sol).

I.3 Invariance

La transformation de Galilée permet maintenant d'étudier précisément le changement des lois de la physique par changement de référentiel. La transformation de Galilée se restreint aux référentiels en MRU les uns par rapport aux autres. La relativité de Galilée utilisant implicitement cette transformation est donc une relativité restreinte. Voyons donc dans quelle mesure la transformation de Galilée modifie la seconde loi de Newton.

Comme précédemment, notons avec un indice $_i$ l'instant initial et un indice $_f$ l'instant final et calculons la force F' exercée sur un objet de masse m dont l'accélération dans le référentiel R' vaut a' :

$$\begin{aligned} F' &= m \cdot a' = m \cdot \frac{v'_f - v'_i}{t'_f - t'_i} \\ &= m \cdot \frac{(v_f - v_{ref}) - (v_i - v_{ref})}{t_f - t_i} \\ &= m \cdot \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = m \cdot a = F \end{aligned}$$

On utilise l'équation I.2 pour changer de référentiel et le fait qu'en relativité galiléenne la masse m est invariante par changement de référentiel. Finalement, on obtient :

$$\boxed{F' = m \cdot a' = m \cdot a = F} \tag{I.4}$$

Ainsi, la seconde loi de Newton s'écrit de la même manière dans les deux référentiels R et R'. On dit qu'elle est formellement invariante par changement de référentiel. En d'autres termes, aucune expérience vérifiant la seconde loi de Newton ne peut permettre de faire la distinction entre les référentiels R et R'. Pour Bruno, cela s'exprime par : "Ainsi je ne puis en rien être certain de ce qui distingue un corps mobile d'un corps stable." et pour Galilée, "... aucun des effets mentionnés [...] ne vous permettra de dire si le bateau est en mouvement ou à l'arrêt ..." comme on l'a vu dans les citations ci-dessus.

Les lois de la physique sont donc formellement les mêmes dans les deux référentiels et rien ne permet de dire que l'un est en mouvement et l'autre pas.

I.4 Forces inertielles

Comme cela a été dit plus haut, l'invariance de la seconde loi de Newton n'existe que dans le cadre de la relativité restreinte, pour des référentiels dits *inertiels*, c'est-à-dire se déplaçant les uns par rapport aux autres en mouvement rectiligne uniforme. Mais qu'en est-il quand on considère d'autres référentiels qui ne se déplacent pas l'un par rapport à l'autre en ligne droite et à vitesse constante ? Dans le cas de référentiels en rotation par exemple, la seconde loi de Newton est-elle vraiment caduque ?

Il ne s'agit pas ici de développer la dynamique de tels référentiels. Seuls deux aspects qu'on évoque parfois, sans vraiment savoir ce dont il s'agit, vont être abordés. Il s'agit du concept de force d'inertie et de celui de force centrifuge.

I.4.1 Force d'inertie

La notion de force d'inertie est très complexe, tant au niveau mathématique (produit vectoriel) qu'au niveau conceptuel (voir le paragraphe I.4.2). L'idée est ici de montrer que la seconde loi de Newton n'est pas invariante par un changement de référentiel non-inertiel. En d'autres termes, pour décrire le mouvement d'une particule dans un référentiel tournant, il faut soit ajouter des forces fictives (point de vue de Newton) dont l'une est la force d'inertie, soit interpréter celle-ci comme un champ de gravitation supplémentaire. On va présenter ici le premier point de vue.

Considérons deux référentiels R et R' qui ne sont pas en MRU l'un par rapport à l'autre, mais dont le second, R', est en rotation à la vitesse angulaire

ω_{ref} par rapport au premier, R. Contrairement à l'invariance de l'accélération par une transformation de Galilée, on montre (voir (Gruber, 1988, p. 202-204.)) que l'accélération d'un objet dans le référentiel R' n'est pas la même que dans le référentiel R. Plus précisément, l'accélération a dans le référentiel R vaut :

$$a = a' + a_{ref} \tag{I.5}$$

où a' est l'accélération dans le référentiel R' et a_{ref} l'accélération du référentiel R' par rapport à R.

C'est là un changement fondamental qui restreint la portée de la relativité galiléenne (et qui a mené Einstein vers la relativité générale).

Comme on a vu au paragraphe 3.2.3, page 62, qu'un objet en rotation circulaire uniforme a une accélération centripète, c'est-à-dire dirigée vers le centre du cercle, donnée par :

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

où v est la vitesse linéaire de l'objet et r le rayon du cercle, on peut appliquer cette relation pour exprimer l'accélération a_{ref} de R' par rapport à R à l'aide de la vitesse v d'un point du référentiel R' situé à une distance r de l'axe de rotation. De plus, l'équation 2.13 permet d'exprimer cette accélération en fonction de la vitesse angulaire ω_{ref}. On a donc :

$$a_{ref} = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega \cdot r)^2}{r} = \omega^2 \cdot r \tag{I.6}$$

L'équation I.5 de l'accélération d'un objet par rapport au référentiel R' peut alors s'écrire :

$$a = a' + \omega^2 \cdot r \tag{I.7}$$

Les équations de la cinématique ne sont donc pas préservées par un tel changement de référentiel (non inertiel).

La dynamique n'est évidemment pas non plus préservée. L'accélération se trouvant au cœur de la seconde loi de Newton, elle ne peut rester formellement invariante. En effet, si elle s'écrit dans le référentiel R :

$$\sum F^{ext} = m \cdot a \tag{I.8}$$

elle doit s'écrire dans le référentiel R' :

$$\begin{aligned} \sum F'^{ext} &= m \cdot a' \\ &= m \cdot (a - \omega^2 \cdot r) \\ &= m \cdot a - m \cdot \omega^2 \cdot r \end{aligned} \tag{I.9}$$

Visiblement l'équation I.8 est formellement différente de I.9.

On peut cependant modifier l'équation I.9 décrivant le mouvement dans le référentiel en rotation R' pour qu'elle corresponde à l'expression I.8 donnée pour le référentiel R :

$$\sum F'^{ext} + m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot a \tag{I.10}$$

$$\sum F^{ext} = \sum F'^{ext} + F_{in} = m \cdot a \tag{I.11}$$

En réinterprétant le terme correspondant à l'accélération du référentiel R' comme une force d'inertie (F_{in}) qui s'additionne aux forces réellement exercées sur l'objet, on peut s'imaginer préserver la forme de la seconde loi de Newton. Bien entendu, ce n'est qu'une manière de masquer le problème, puisque pour le référentiel R' uniquement, il faut ajouter la force d'inertie. Et comme cette force n'a aucune réalité, comme aucun corps ne l'exerce, elle est considérée comme une force fictive, une pseudo-force qui n'a pas d'existence propre. On lui donne un nom : la force centrifuge.

I.4.2 Force centrifuge

Du point de vue de la mécanique newtonienne, la force centrifuge est donc une pseudo-force à n'introduire dans la seconde loi que pour des référentiels non inertiels (c'est-à-dire accélérés). Dans le cadre d'une annexe portant sur la relativité, il convient de mentionner que cette force peut ne pas être vue comme une pseudo-force. Einstein va lui donner une "réalité" en la considérant comme une force de gravitation [a]. Cela va le mener à redéfinir la notion même de gravitation à travers la courbure de l'espace.

a. Le cas d'un pendule placé dans un train qui accélère permet de comprendre le lien entre l'inertie et la gravitation (voir (Gruber, 1988, p. 400-404.))

Annexe J

Marées

Figure J.1 – *Marée*[66]

L'analyse se fait en trois étapes. Tout d'abord, la détermination du centre de gravité du système Terre-Lune. Puis, le calcul de la force d'inertie sur un élément de masse d'eau que l'application de la seconde loi de Newton modifiée pour des référentiels en rotation (voir annexe I) nécessite ou, d'un autre point de vue, le calcul de la pseudo-force centrifuge exercée sur cet élément et enfin le calcul de son poids relatif. L'analyse des termes constituant le poids relatif permettra alors de préciser l'influence de la Lune et d'expliquer la présence de deux marées par jour.

J.1 Introduction

L'ORIGINE DES MARÉES est un phénomène à la fois simple et complexe. Simple, car il suit d'assez près le mouvement de la Lune pour qu'on puisse naturellement le lui attribuer. Complexe, car il se produit aussi sur la Terre à l'opposé du zénith de la Lune et il est souvent en retard sur son passage.

Nous allons ici rappeler la simplicité du phénomène et expliquer pourquoi il se produit à la fois du côté de la Terre où se trouve la Lune et à l'opposé. L'explication des différents retards des marées sur le passage de la Lune ne sera pas abordée ici, car elle est très complexe. Une description du phénomène ayant été faite précédemment (voir paragraphe 3.2.3), nous nous intéresserons ici plus particulièrement à l'aspect mathématique du phénomène, tout en expliquant le plus simplement les choses.

J.2 Centre de gravité

Une partie du problème des marées se trouve dans le fait que le système Terre-Lune a un centre de gravité qui ne coïncide pas avec le centre de la Terre, comme le montre la figure J.2.

La notion de centre de gravité est ici relativement aisée à saisir. Imaginons deux masses m identiques situées à une distance d l'une de l'autre. On comprend bien que le centre de gravité de ce système se trouve exactement au milieu entre les masses. Maintenant, si l'une des masses double ($M = 2 \cdot m$), le centre de gravité va se rapprocher d'elle. La masse totale du système valant $3 \cdot m$, on comprend bien que la plus grande des masses compte pour deux tiers et la plus petite pour un tiers. Le centre de gravité se trouve donc à un tiers de la distance entre les corps, du côté de la plus grande masse. Depuis le centre de la plus grande masse, la distance

Figure J.2 – *Système Terre-Lune*

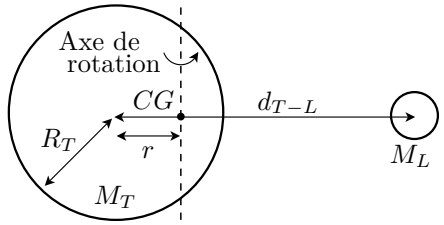
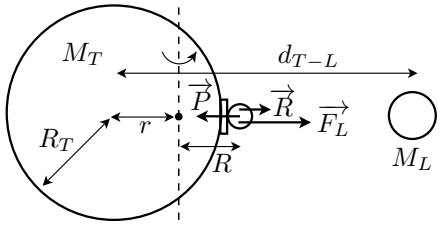


Figure J.3 – *Système Terre-Lune-eau*



r au centre de gravité se calcule donc ainsi :

$$r = \frac{m}{M+m} \cdot d \tag{J.1}$$

(depuis le centre de la plus petite masse, la distance au centre de gravité se calcule de la même manière en remplaçant le m du numérateur de la fraction par M).

J.3 Force d'inertie

En substance, le problème des marées est posé par la rotation d'une masse m d'eau non pas autour du centre de la Terre, mais autour du centre de gravité du système Terre-Lune. Il s'agit d'un mouvent circulaire uniforme et l'une des composantes de la seconde loi de Newton est l'accélération centripète a_c de cette masse. On peut l'exprimer sous différentes formes présentées dans l'équation J.2 :

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R \tag{J.2}$$

où v est la vitesse linéaire de la masse m d'eau, R la distance du centre de gravité à la masse m et ω sa vitesse angulaire. En effet, l'équation 2.13, page 47 montre que la vitesse linéaire d'un corps tournant en mouvement circulaire uniforme vaut $v = \omega \cdot R$ avec pour unité $[\omega] = \text{rad/s}$.

J.3.1 Vitesse angulaire

Or, la vitesse linéaire de la masse d'eau n'est pas celle qui résulte de sa rotation diurne autour du centre de la Terre, mais celle correspondant au déplacement de m sous l'influence de la Lune, c'est-à-dire celle correspondant à sa rotation autour du centre de gravité du système Terre-Lune. Avec les grandeurs présentées à la figure J.2 et l'équation J.1, le calcul de la vitesse angulaire ω de ce dernier est le suivant :

$$\begin{aligned}
F &= M_L \cdot \omega^2 \cdot R \\
G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{d_{T-L}^2} &= M_L \cdot \omega^2 \cdot (d_{T-L} - r) \\
G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{d_{T-L}^2} &= M_L \cdot \omega^2 \cdot (d_{T-L} - \frac{M_L \cdot d_{T-L}}{M_L + M_T}) \\
G \cdot \frac{M_T}{d_{T-L}^2} &= \omega^2 \cdot d_{T-L} \cdot (1 - \frac{M_L}{M_L + M_T}) \\
G \cdot \frac{M_T}{d_{T-L}^3} &= \omega^2 \cdot \frac{M_L + M_T - M_L}{M_L + M_T} \\
G \cdot \frac{M_T}{d_{T-L}^3} &= \omega^2 \cdot \frac{M_T}{M_L + M_T} \\
\omega^2 &= G \cdot \frac{M_L + M_T}{d_{T-L}^3}
\end{aligned} \tag{J.3}$$

J.3.2 Force d'inertie

On peut alors calculer la force d'inertie à ajouter à la seconde loi de Newton dans le cas de référentiels en rotation, puisque le référentiel lié au centre de la Terre est en rotation autour du centre de masse du système Terre-Lune. En considérant la distance du centre de gravité au centre de la Terre :

$$r = \frac{M_L}{M_T + M_L} \cdot d_{T-L}$$

et l'équation J.3, on peut écrire cette force sous la forme :

$$\begin{aligned}
F_{in} &= m \cdot \omega^2 \cdot r \\
&= m \cdot G \frac{M_L + M_T}{d_{T-L}^3} \cdot \frac{M_L}{M_L + M_T} \cdot d_{T-L} \\
&= m \cdot G \frac{M_L}{d_{T-L}^2}
\end{aligned} \tag{J.4}$$

J.4 Poids relatif

On peut maintenant calculer le poids relatif à l'aide de la seconde loi de Newton. La masse d'eau m est en équilibre statique dans le référentiel lié au centre de la Terre et son accélération est nulle. On peut s'imaginer cette masse comme posée sur une balance. Les forces qui s'exercent sur elle sont son poids P, correspondant à l'attraction de la Terre, l'attraction F_L de la Lune, la force d'inertie F_{in} et la réaction R de la balance qui constitue le poids apparent de la masse d'eau. Si on choisit un axe dirigé vers le centre de la Terre, on peut ainsi écrire :

$$\sum F = P - R - F_L + F_{in} = 0 (= m \cdot a_m) \quad \text{(J.5)}$$

Soit, en utilisant la loi de la gravitation universelle et l'équation J.4 dans l'équation J.5 :

$$P - R - G\frac{M_L \cdot m}{(d_{T-L} - R_T)^2} + G\frac{M_L}{d_{T-L}^2} = 0$$

$$P - R - G\frac{M_L \cdot m}{d_{T-L}^2} \cdot (1 + \frac{2 \cdot R_T}{d_{T-L}}) + G\frac{M_L}{d_{T-L}^2} = 0 \quad \text{(J.6)}$$

$$P - R - G\frac{M_L \cdot m}{d_{T-L}^2} - 2\dot{G}\frac{M_L \cdot m}{d_{T-L}^3} \cdot R_T + G\frac{M_L \cdot m}{d_{T-L}^2} = 0$$

$$P - R - 2 \cdot G\frac{M_L \cdot m}{d_{T-L}^3} \cdot R_T = 0 \quad \text{(J.7)}$$

Pour établir l'équation J.6, on a utilisé le développement limité : $(1+x)^p \simeq 1 + p \cdot x$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(d_{T-L} - R_T)^2} &= \frac{1}{d_{T-L}^2} \cdot \frac{1}{(1 - R_T/d_{T-L})^2} \\ &= \frac{1}{d_{T-L}^2} \cdot (1 - R_T/d_{T-L})^{-2} \\ &\simeq \frac{1}{d_{T-L}^2} \cdot (1 + (-2) \cdot (-\frac{R_T}{d_{T-L}})) \\ &= \frac{1}{d_{T-L}^2} \cdot (1 + \frac{2 \cdot R_T}{d_{T-L}})\end{aligned}$$

En réorganisant les termes de l'équation J.7, on obtient finalement la force de réaction d'une balance qu'on placerait sous la masse m d'eau :

$$R = P - 2 \cdot G\frac{M_L \cdot m}{d_{T-L}^3} \cdot R_T \quad \text{(J.8)}$$

Cette équation se comprend par l'action du poids P sur la masse d'eau m et par une force, dite force de marée, opposée au poids et qui soulève la masse.

La force de marée de l'équation J.8 correspond à la force donnée par l'équation 3.20, page 68, et le développement ci-dessus en constitue une démonstration.

L'analyse du rapport des forces de marées lunaire et solaire qui suit l'équation 3.20, page 68, et qui est issue de la forme de l'équation J.8, constitue aussi une suite logique au calcul présenté ci-dessus que nous ne reprendrons pas ici.

J.5 Analyse différentielle

Le cadre de l'analyse présentée ci-dessus est celui de la seconde loi de Newton. Insistons sur le fait que l'ensemble des forces considérées s'exercent sur le même système, soit la masse m d'eau. Cette analyse est donc cohérente avec la formulation de la seconde loi qui s'applique sur un système de masse m.

On va maintenant présenter une autre analyse du problème qui est moins consistante puisque les forces qu'elle utilise ne s'appliquent pas sur un système unique. Cependant, non seulement elle mène au même résultat, mais encore elle permet de mettre en évidence le caractère différentiel des forces de marées, caractère qui apparaîtra alors plus clair dans l'étude des forces de marées exercées sur des satellites comme Io autour de Jupiter. La notion de limite de Roche pourra donc être mieux abordée au paragraphe J.7.

J.6 Autres rythmes

L'explication de la présence de deux marées par jour (*dites de pleines et basses mers*) ne constitue qu'une partie de la compréhension du phénomène de marée. Même dans le cadre de la théorie de Newton, et sans entrer dans la théorie ondulatoire, d'autres périodes sont associées aux marées. Dans ce paragraphe on va entrer dans ce qu'on peut appeler la dimension astronomique du phénomène. Évidemment, c'est la gravitation qui reste le moteur des influences. Mais celles-ci varient en fonction de la position des astres.

Figure J.4 – *Décalage horaire de la marée*
Une cinquantaine de minutes chaque jour.

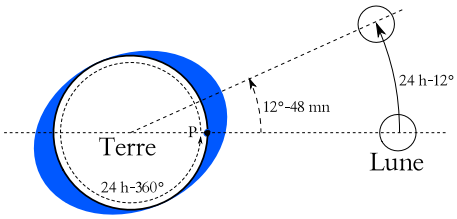
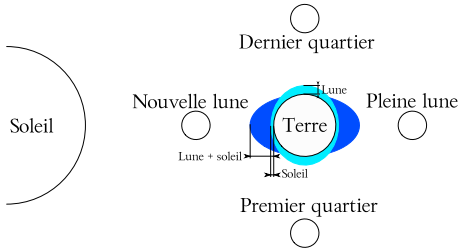


Figure J.5 – *Marées de vives et mortes eaux*
Représentation dans le plan écliptique.



J.6.1 Décalages

Une première conséquence du mouvement relatif de la Lune sur les marées se présente sous la forme d'un déplacement perpétuel des heure de pleine et basse mer. Si la Lune ne tournait pas autour de la Terre, les pleine et basse mer auraient lieu toujours au même moment dans la journée. Ce n'est pas le cas en raison du déplacement de la Lune autour de la Terre. En effet, comme le montre la figure J.4, pendant que la Terre fait un tour sur elle-même en vingt quatre heures, la lune se déplace. Comme cette dernière fait un tour autour de la Terre en trente jours, en vingt quatre heures, c'est-à-dire en une journée, la Lune parcours un angle de $360/30 = 12°$. Au bout de vingt quatre heures, une personne située au point P ne verrait plus la Lune au zénith (au-dessus d'elle). Il lui faudrait parcourir encore un angle de 12° pour cela. Comme la terre parcours 360° en vingt quatre heures, il lui faut encore attendre 48 minutes pour se retrouver en situation de pleine mer. Chaque jour, les pleines et basses mers se produisent avec environ cinquante minutes de retard sur le jour précédent.

J.6.2 Marées de vives et mortes eaux

Le marnage, la différence de hauteur d'eau entre une pleine et une basse mer, varie dans le temps. Chaque mois, on constate un marnage maximum (marée de vive eau) et un minimum (marée de morte eau). On remarque aussi que ces marées particulières correspondent à certaines phases de la lune (voir la figure 1.17, page 31) : lors des nouvelle et pleine lune, la marée est de vive eau et lors des quartiers, elle est de morte eau.

Comme les phases de la Lune correspondent à des positions particulières de notre satellite par rapport à l'axe Terre-Soleil, on peut en trouver une explication dans le rapport des actions gravifiques de la Lune et du Soleil. Comme on l'a vu (voir 3.20, page 68), ce rapport est défavorable au Soleil, dont la masse est plus grande que celle de la Lune, mais qui se trouve plus loin que la Lune, en raison de la dépendance en $1/d^3$ de la force de marée. Mais, même si elle est moins importante que celle de la Lune, l'action du Soleil existe.

L'explication est simple. Comme le montre la figure J.5, quand le Soleil, la Terre et la Lune sont alignés, les forces lunaires et solaires s'additionnent. On a des marées de vives eaux à la nouvelle et à la pleine lune. Par contre, aux premiers et derniers quartiers, les actions de la Lune et du Soleil ne se produisent pas dans le même axe et les marées sont de basses eaux.

J.6.3 Marées d'équinoxes

On entend souvent parler des "grandes marées d'équinoxes". On se limitera ici à évoquer le phénomène, car il ne trouve une explication convaincante que dans la théorie ondulatoire des marées. Tout se passe comme si la force de marée exercée par le Soleil était maximale quand l'axe de rotation de la Terre est perpendiculaire à la direction Terre-Soleil. Si on considère que la direction de cet axe reste fixe dans l'espace, la figure 1.14, page 29, présente la situation : aux solstices, l'angle $\alpha \simeq 66{,}5°$, alors qu'aux équinoxes, il vaut 90°. Pour bien s'en rendre compte, il faut considérer le plan constitué par l'axe de rotation de la Terre et le Soleil aux solstices. Ce plan est perpendiculaire au plan de l'écliptique. Mais si aux solstices l'axe de rotation de la Terre fait un angle non droit avec la direction Terre-Soleil, aux équinoxes cet angle est droit car ce plan est perpendiculaire à l'écliptique.

J.6.4 Marées de périgée et périhélie

On sait grâce à Kepler (voir le paragraphe 2.5.7, page 48) que l'orbite de la Lune est une ellipse. Cela signifie que la distance Terre-Lune varie. On nomme *périgée* le point de l'orbite de la Lune où cette distance est minimale et *apogée* celui où elle est maximale.

Au périgée, la distance Terre-Lune vaut : $3{,}654 \cdot 10^8$ m et à l'apogée $4{,}067 \cdot 10^8$ m. Comme la force de marée est inversement proportionnelle au cube de la distance (ce qui donne une puissance $^{-3}$), la différence de force de marée lunaire entre le maximum et le minimum par rapport au minimum vaut :

$$\begin{aligned}\Delta F_{marée}^{lunaire} &= \frac{d_{périgée}^{-3} - d_{apogée}^{-3}}{d_{apoée}^{-3}} \\ &= \frac{(3,654 \cdot 10^8)^{-3} - (4,067 \cdot 10^8)^{-3}}{(4,067 \cdot 10^8)^{-3}} \\ &\simeq 0,38 \equiv 38\%\end{aligned}$$

Ce rapport n'est de loin pas négligeable et il faut en tenir compte.

L'orbite de la Terre autour du Soleil est aussi une ellipse et la distance Terre-Soleil varie aussi. On nome *périhélie* le point de l'orbite de la terre où cette distance est minimale et *aphélie* le point le plus éloigné.

Au périhélie (le 3 janvier) la distance Terre-Soleil vaut : $1{,}471 \cdot 10^{11}$ m et à l'aphélie (le 3 juillet) $1{,}521 \cdot 10^{11}$ m. Comme la force de marée est inversement proportionnelle au cube de la distance (ce qui donne une puissance $^{-3}$), la différence de force de marée solaire entre le maximum et le minimum par rapport au minimum vaut :

$$\begin{aligned}\Delta F_{marée}^{solaire} &= \frac{d_{périhélie}^{-3} - d_{aphélie}^{-3}}{d_{aphélie}^{-3}} \\ &= \frac{(1,471 \cdot 10^{11})^{-3} - (1,521 \cdot 10^{11})^{-3}}{(1,521 \cdot 10^{11})^{-3}} \\ &\simeq 0,1 \equiv 10\%\end{aligned}$$

Bien que plus faible que pour la Lune, ce rapport n'est pas non plus négligeable et il faut en tenir compte.

J.6.5 Marées de déclinaison

Jusque là, on a considéré que la lune tournait dans le plan de l'écliptique. Ce n'est en réalité pas le cas. Elle tourne dans un plan dont l'inclinaison par rapport à l'écliptique varie de 5° à 5°17′ en oscillant sur une période de 173 jours. La symétrie axiale du champ de force de marée présentée à la figure 3.9, page 68, évolue donc de part et d'autre de l'Équateur au cours du temps.

C'est un rythme de plus ...

J.6.6 Retards et marées côtières

La théorie newtonienne des marées, analysée à la lumière de l'astronomie de position, permet donc une première compréhension du phénomène de marée. Elle démontre clairement que le principal acteur qui l'explique est la Lune. Mais, elle n'explique de loin pas tout. En effet, on peut noter des décalages systématiques de plusieurs dizaines d'heures entre les marées de vive (ou morte) eau et les phases de la Lune. Ce retard ne s'explique qu'en terme d'ondes.

De plus, si les prédictions de la théorie newtonienne sont bons en haute mer, ils sont largement insuffisant près des côtes où des effets ondulatoires sont à prendre en compte.

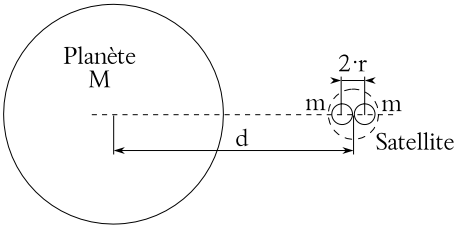
La théorie ondulatoire de la marée repose sur de complexes équations dites de Laplace et inaccessible dans le cadre de ce cours. Mais on peut trouver une bonne description mathématique de cette théorie dans Simon (2007).

J.7 Limite de Roche

Les effets de marée présentés ci-dessus sont bien connus de tous puisqu'ils se manifestent clairement à nous sur les plages. Il faut aussi dire qu'il existe des marées terrestres : simultanément à la surface océanique, la Lune déforme la croûte terrestre. Et il faut savoir que ces effets sont réciproques. Si la Lune exerce son influence sur la Terre, la Terre exerce aussi des forces de marée sur la Lune et celle-ci se déforme sous leurs effets. De la même manière, le satellite Io a un volcanisme très actif dû aux effets de marées produits sur lui par la planète Jupiter.

Tant qu'un satellite est assez éloigné de la planète qui l'attire, les effets de marée se limitent à

Figure J.6 – *Limite de Roche*



des frictions et à des déformations. Par contre, si le satellite s'en approche trop, il peut être détruit par les tensions internes qu'il va subir. C'est ce qui explique en partie pourquoi les anneaux d'astéroïdes, comme ceux de Saturne, ne donnent pas naissance à des satellites sous l'effet de leur attraction mutuelle. La distance à partir de laquelle cela se produit est complexe à déterminer. Cependant, à l'aide de quelques approximations judicieuses, il est possible d'évaluer cette distance, qui porte le nom de *limite de Roche* en hommage au physicien qui la découvrit.

J.7.1 Modèle simplifié

L'idée est de considérer un satellite situé à une distance d d'une planète comme composé de deux corps distincts maintenus ensemble par leur action gravifique mutuelle. La figure J.6 présente la situation.

En raison de sa plus grande proximité, la force de gravitation exercée par la planète sur la partie du satellite la plus proche d'elle est plus importante que celle exercée sur la partie la plus éloignée. En supposant que les centres de masse des deux parties du satellite sont séparés par une distance $2 \cdot r$, on peut calculer la différence de force qui s'exerce :

$$\Delta F = G \cdot \frac{M \cdot m}{(d-r)^2} - G \cdot \frac{M \cdot m}{(d+r)^2}$$

Pour simplifier cette expression, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\Delta F &= G \cdot \frac{m \cdot m}{d^2 \cdot (1 - r/d)^2} - G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2 \cdot (1 + r/d)^2} \\ &= G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2} \cdot ((1 - r/d)^{-2}) - (1 + r/d)^{-2})\end{aligned}$$

En raison de la relation (de développement limité) suivante :

$$(1 + x)^p \simeq 1 + p \cdot x$$

et du fait que $r \ll d$, on peut réécrire la différence de force :

$$\begin{aligned}\Delta F &= G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2} \cdot ((1 + 2 \cdot r/d) - (1 - 2 \cdot r/d)) \\ &= G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2} \cdot 4 \cdot r/d \\ &= 4 \cdot G \cdot \frac{M \cdot m}{d^3} \cdot r\end{aligned}$$

D'autre part, la force de cohésion gravitationnelle entre les deux parties du satellite est donnée par :

$$F_c = G \cdot \frac{m \cdot m}{(2 \cdot r)^2}$$

Mais, le satellite est détruit quand la différence de force gravitationnelle (force de marée) produite par la planète sur le satellite est plus grande que la force de cohésion, c'est-à-dire :

$$4 \cdot G \cdot \frac{M \cdot m}{d^3} \cdot r > G \cdot \frac{m \cdot m}{(2 \cdot r)^2}$$

En utilisant les masses volumiques des deux corps, ρ_p pour la planète et ρ_s pour le satellite, on a :

$$\begin{aligned}M &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho_p \\ m &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho_s\end{aligned}$$

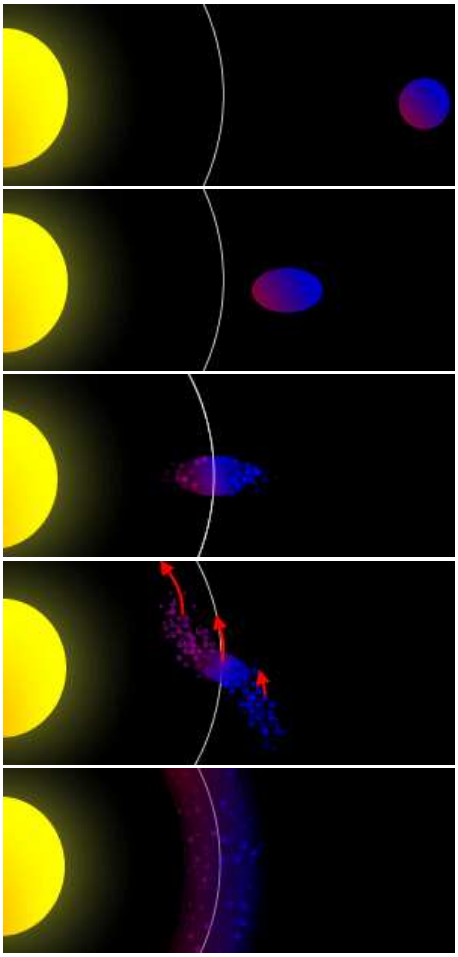
où R est le rayon de la planète. Cela permet d'écrire :

$$\begin{aligned}4 \cdot \frac{R^3 \cdot \rho_p \cdot r^3 \cdot \rho_s}{d^3} \cdot r &> \frac{(r^3 \cdot \rho_s)^2}{4 \cdot r^2} \\ 4 \cdot \frac{R^3 \cdot \rho_p}{d^3} &> \frac{\rho_s}{4} \\ 16 \cdot R^3 \cdot \frac{\rho_p}{\rho_s} &> d^3 \\ d &< R \cdot \sqrt[3]{16 \cdot \frac{\rho_p}{\rho_s}}\end{aligned}$$

avec finalement l'expression de la limite de Roche, c'est-à-dire la distance minimale, par rapport à la planète, à laquelle le satellite est détruit :

$$d_{Roche} = R \cdot \sqrt[3]{16 \cdot \frac{\rho_p}{\rho_s}} \qquad \text{(J.9)}$$

Figure J.7 – *Limite de Roche*[67]



J.7.2 Exemples

L'une des planètes les plus intéressantes du point de vue de la limite de Roche est certainement Saturne en raison des ses satellites et de ses anneaux. Pour se faire une idée numérique du calcul de la limite de Roche, considérons par exemple Épiméthée, l'un de ses satellites dont la masse volumique vaut :

$$\rho_s = 0{,}61 \cdot 10^3 \,\mathrm{kg/m^3}$$

Comme la masse volumique de Saturne vaut :

$$\rho_p = 0{,}6873 \cdot 10^3 \,\mathrm{kg/m^3}$$

et que son rayon équatorial est $R = 60\ 268\,\mathrm{km}$, on peut calculer la limite de Roche :

$$\begin{aligned} d_{Roche} &= R \cdot \sqrt[3]{16 \cdot \frac{\rho_p}{\rho_s}} \\ &= 60'268 \cdot \sqrt[3]{16 \cdot \frac{0,6873 \cdot 10^3}{0,61 \cdot 10^3}} = 158\ 027\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

Sachant que le rayon de l'orbite d'Épiméthée est de 2,51 fois le rayon de Saturne, soit environ 151 400 km, on peut calculer le rapport r de la distance d'Épiméthée-Saturne à la distance de Roche :

$$r = \frac{151'400}{158'027} = 0,96$$

Épiméthée est donc à une distance de Saturne correspondant à 96% de la limite de Roche. Cela peut s'expliquer par le fait que d'autres forces de cohésion que la gravité s'exercent dans le satellite.

Il est aussi intéressant de constater que les anneaux G et E de Saturne, situés respectivement de 170 000 à 175 000 km et de 181 000 à 483 000 km de Saturne, sont bien au-delà de la limite de Roche. Pour l'anneau E, il pourrait s'agir de matière volcanique éjectée par Encelade, l'un des satellites de Saturne.

En réalité le calcul de la limite de Roche réelle est plus compliqué que celui présenté ci-dessus et il mène à la distance suivante :

$$d_{roche} = 2,422649865 \cdot R \cdot \sqrt[3]{\frac{\rho_p}{\rho_s}} \qquad \text{(J.10)}$$

soit pour Épiméthée la valeur de 151 932 km.

Annexe K

Énergies

K.1 Introduction

CETTE ANNEXE est destinée à aller un peu plus loin que ce qui figure dans le cours concernant les différentes énergies. Elle est faite de quelques exemples particuliers qui peuvent fixer les idées, les ordres de grandeur, les problèmes, etc. Ce domaine étant très vaste, il ne s'agit ici que de donner quelques exemples, sans plus.

K.2 Énergie hydraulique

On s'intéresse ici au barrage du Châtelot, entré en service en novembre 1953, sur le Doubs dans le Jura suisse et français. Ce barrage a une hauteur de 74 m. Par ailleurs, les turbines ne se trouvent pas à son pied, mais plus bas au bord de l'eau. Celle-ci est amenée par une conduite forcée de trois kilomètres selon une pente de 4 ‰, ce qui représente un hauteur supplémentaire de 12 m. Au total, la hauteur est donc de 86 m. Le Doubs a un débit moyen de 25 m^3/s. Mais le débit aménagé, c'est-à-dire le débit maximal produisant de l'énergie, est de 44 m^3/s.

Le débit de restitution étant fixé par la loi française à environ 10% du débit moyen de la rivière, un turbinage minimum permanent de 2 m^3/s est réalisé (pendant les phases de remplissage du barrage). A partir de ces données on peut estimer la puissance moyenne $\overline{P}$ de chute :

$$\begin{aligned}\overline{P} &= \eta \cdot Q \cdot g \cdot h \\ &= 0,8 \cdot 25 \cdot 9,81 \cdot 86 = 16\ 873\,\text{kW}\end{aligned}$$

Figure K.1 – *Le barrage du Châtelot*
Sur le Doubs dans le jura.

Cela représente une énergie totale par année de :

$$\begin{aligned}E &= 16'873 \cdot 24 \cdot 365 \\ &= 147,807\,\text{millions de kW h} \\ &= 147\ 807\,\text{MW h}\end{aligned} \qquad \text{(K.1)}$$

Évidemment, la puissance installé doit être plus importante pour faire face à un débit plus important. On a :

$$\begin{aligned}P_{inst} &= \eta \cdot Q \cdot g \cdot h \\ &= 0,8 \cdot 44 \cdot 9,81 \cdot 86 \cong 30\ 000\,\text{kW}\end{aligned}$$

La puissance installé est de 15 000 kW pour chacune des deux turbines. La puissance totale installée est donc de 30 000 kW.

On peut alors évaluer approximativement le nombre de ménages que peut alimenter le barrage

du Châtelot. En effet, sachant que ce barrage fournit la moitié de son énergie à la France et l'autre moitié à la Suisse [a] et que la consommation électrique moyenne par ménage suisse est d'environ 2000 kW h/a, on couvre les besoins de :

$$n = \frac{147,807 \cdot 10^6}{2 \cdot 2000} = 36'951 \text{ ménages}$$

Très grossièrement, on peut dire que le barrage couvre trois fois les besoins des ménages (sans les entreprises, commerces et administrations) de la ville de la Chaux-de-Fonds ($\sim$ 30 000 personnes c'est-à-dire, à trois personnes par ménages, approximativement 10 000 ménages).

L'énergie électrique est distribuée vers la Suisse par quatre lignes haute tension de 60 000 V chacune et par deux lignes sous la même tension vers la France.

K.3 Énergie éolienne

K.3.1 Règle de Betz

Démonstration de la règle de Betz :

On imagine une éolienne brassant à l'aide de ses pales une surface S. Si la vitesse du vent en amont est v_{amont}, en un temps donné t toutes les particules se trouvant jusqu'à une distance $d = v_{amont} \cdot t$ d'elle la traverseront. Le volume d'air qu'elle brassera sera donc de :

$$V = S \cdot d = S \cdot v_{amont} \cdot t$$

En considérant la masse volumique de l'air ρ, on calcule la masse d'air que cela représente par :

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot v_{amont} \cdot t$$

On peut alors calculer la puissance correspondant au déplacement de cette masse d'air :

$$\begin{aligned} P &= \frac{E_{cin}}{t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{amont}^2}{t} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{t} \cdot v_{amont}^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot v_{amont}^3 \end{aligned}$$

a. Selon la Convention franco-suisse du 19 novembre 1930.

Si maintenant on comprend qu'une partie de cette énergie est prise au vent par l'éolienne, on se rend compte que cela implique une diminution de sa vitesse en aval. Soit v_{aval} cette vitesse. On peut considérer que la même masse d'air traverse l'éolienne, mais à une vitesse moyenne plus faible. On peut donc admettre (cela se justifie) que cette vitesse est la moyenne des vitesses en amont et en aval :

$$v_{moy} = \frac{v_{amont} + v_{aval}}{2}$$

Ainsi, le volume traversant l'éolienne est :

$$V = S \cdot v_{moy} \cdot t = S \cdot \frac{v_{amont} + v_{aval}}{2} \cdot t$$

Et la masse est alors :

$$m = \rho \cdot S \cdot \frac{v_{amont} + v_{aval}}{2} \cdot t$$

La diminution de la puissance du flux d'air qui correspond à la puissance reçue par l'éolienne est ainsi :

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{\Delta E_{cin}}{t} = \frac{E_{cin}^{amont} - E_{cin}^{aval}}{t} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{amont}^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{aval}^2}{t} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{t} \cdot (v_{amont}^2 - v_{aval}^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot \frac{v_{amont} + v_{aval}}{2} \cdot (v_{amont}^2 - v_{aval}^2) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot S \cdot (v_{amont}^2 - v_{aval}^2) \cdot (v_{amont} + v_{aval}) \end{aligned}$$

Si on cherche quelle est la vitesse en aval v_{av} qui donne un maximum de puissance, il faut dériver la fonction ΔP par rapport à v_{av} et l'annuler. Pour écourter la notation, on pose encore : $v_{amont} = v_{am}$.

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta P}{dv_{av}} &= \frac{d}{dv_{av}}(\frac{1}{4} \cdot \rho \cdot S \cdot (v_{am}^2 - v_{av}^2) \cdot (v_{am} + v_{av})) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot S \cdot \frac{d}{dv_{av}}((v_{am}^2 - v_{av}^2) \cdot (v_{am} + v_{av})) = 0 \end{aligned}$$

L'équation à résoudre alors est :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv_{av}}((v_{am}^2 - v_{av}^2) \cdot (v_{am} + v_{av})) = 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{dv_{av}}(v_{am}^3 + v_{am}^2 \cdot v_{av} - v_{av}^2 \cdot v_{am} - v_{av}^3) = 0 \Rightarrow \\ v_{am}^2 - 2 \cdot v_{am} \cdot v_{av} - 3 \cdot v_{av}^2 = 0 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation du second degré en v_{av} dont la solution est :

$$\begin{aligned} v_{av} &= \frac{2 \cdot v_{am} \pm \sqrt{(2 \cdot v_{am})^2 - 4 \cdot (-3) \cdot v_{am}^2}}{2 \cdot (-3)} \\ &= \frac{2 \cdot v_{am} \pm \sqrt{16 \cdot v_{am}^2}}{-6} \\ &= \frac{2 \cdot v_{am} \pm 4 \cdot v_{am}}{-6} \\ &= \frac{v_{am} \pm 2 \cdot v_{am}}{-3} = \begin{cases} v_{am}/3 \\ -v_{am} \end{cases} \end{aligned}$$

Évidemment $v_{aval} > 0$ et donc seule la solution positive à un sens. On a donc finalement :

$$v_{aval} = \frac{v_{amont}}{3} \tag{K.2}$$

Et la conséquence pour la variation de puissance est que :

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot S \cdot (v_{am}^2 - v_{av}^2) \cdot (v_{am} + v_{av}) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot S \cdot (v_{am}^2 - (v_{am}/3)^2) \cdot (v_{am} + v_{am}/3) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot S \cdot (\frac{9 \cdot v_{am}^2 - v_{am}^2}{9}) \cdot (\frac{3 \cdot v_{am} + v_{am}}{3}) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot S \cdot (\frac{8 \cdot v_{am}^2}{9}) \cdot (\frac{4 \cdot v_{am}}{3}) \\ &= \frac{16}{27} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot v_{am}^3 \\ &= \frac{16}{27} \cdot P = 0,57 \cdot P \end{aligned}$$

Ce qui signifie que la puissance maximale que l'éolienne peut développer représente les 16/27 de la puissance du vent, soit 57% de celle-ci :

$$P_{éolienne} = \frac{16}{27} \cdot P_{vent} \tag{K.3}$$

Cela constitue la limite de Betz.

K.3.2 Éoliennes

Éolienne de Collonges-Dorénaz

Il ne s'agit pas ici de se substituer aux multiples informations qui se trouvent sur internet[68]. Il s'agit simplement d'illustrer la théorie à travers l'exemple concret de la plus grande éolienne de Suisse pour permettre une comparaison avec un barrage comme celui du Châtelot (voir paragraphe K.2).

Le mât fait pratiquement 100 m de haut et la longueur des pales est de 33 m. Le rendement est très proche de la limite de Betz puisqu'iut 56%. La puissance maximale est de 2000 kW, mais la production annuelle est de 3,5 GW h. Si la consommation électrique annuelle moyenne d'un ménage est d'environ 2000 kW h, le nombre n de ménages qui peuvent être alimentés par cette éolienne vaut :

$$n = \frac{3,5 \cdot 10^6}{2000} = 1750 \text{ ménages}$$

Comparé au 74 000 ménages alimentés par le barrage du Châtelot (parties suisse et française ensemble), cela peut paraître bien peu. Encore faut-il comparer le coût du barrage aux quatre millions d'investissement pour cette éolienne. Et aussi comparer les deux impacts écologiques, les possibilités et le coût de démontage, les risques d'accidents ... Une juste comparaison nécessite de prendre en compte un nombre de paramètres assez grand pour qu'il ne soit pas possible ici de poursuivre plus avant la comparaison.

Éoliennes du Mont Soleil (Jura suisse)

A nouveau l'information se trouve sur internet[69].

Il faut savoir que cette centrale est constituée de huit éoliennes d'une puissance allant de 600 à 1750 kW. Elles ont une hauteur de mât de 45 à 67 m et des pales de 22 à 33 m. L'ensemble a produit en 2006 une énergie de 9,176 GW h. Cela représente 4588 ménages (à 2000 kW h/a). Une fois encore c'est bien peu comparé au barrage du Châtelot. Mais les remarques faites précédemment restent valables.

Au total, la centrale de Collonges-Dorénaz et celle du Mont Soleil alimentent ensemble environ 6300 ménages, soit très approximativement la moitié d'une ville comme La Chaux-de-Fonds en Suisse.

K.4 Géothermie

Il existe en Suisse une centrale géothermique qui permet un chauffage urbain, à l'instar de Cridor à La Chaux-de-Fonds. Il s'agit de la centrale de Riehen près de Bâle. Elle est constituée de deux pompes à chaleur qui exploitent la chaleur d'une eau à 65° provenant d'un forage à 1547 m (un second forage, distant de 1 km du premier,

réinjecte de l'eau froide à 1247 m, avec un débit de 18 l/s). Elle permet d'approvisionner 180 immeubles à Riehen et de nouvelles constructions en Allemagne. L'énergie annuellement produite est de 22,8 GW h[70]. À raison d'environ 20 MWh/an pour une famille de trois personnes, on a une couverture en terme de chauffage à distance (chauffage et eau chaude sanitaire) de :

$$n = \frac{22'800}{20} = 1'140 \text{ ménages}$$

Ce qui représente environ 3500 personnes.

K.5 Énergie de combustion des déchets

Nous allons prendre pour exemple de ce type de production énergétique la centrale de chauffage à distance de Cridor à La Chaux-de-Fonds dans le Jura suisse. L'objectif est d'avoir un exemple concret de ce qui se fait déjà dans un domaine concernant les énergies renouvelables qui passe souvent trop inaperçu.

La production[71] totale d'énergie par cette usine d'incinération est de 85 000 MW h/a. Par comparaison, rappelons que la production du barrage du Châtelot est de 150 000 MWh/an (voir équation K.1), soit environ le double.

Cette énergie se partage en 60 000 MW h/a pour le chauffage à distance (chauffage des habitations) et 25 000 MW h/a produit par une turbine sous forme électrique, dont 19 000 MW h/a sont vendus. Cela représente 55 000 t/a de déchets incinérés. Le nombre de ménages fournis en énergie électrique est donc de :

$$n = \frac{19'000 \cdot 10^6}{2000 \cdot 10^3} = 9500 \text{ ménages}$$

Pour l'énergie thermique, en comptant très approximativement 20 MW h/a pour une famille de trois personnes, on a une couverture en terme de chauffage à distance (chauffage et eau chaude sanitaire) de :

$$n = \frac{60'000}{20} = 3000 \text{ ménages}$$

Ce qui représente environ 10 000 personnes.

Annexe L

Exercices

DEUX CONSEILS pour la résolution des exercices : faites un dessin quand cela est possible et expliquez-vous le problème en français.

L.1 Problèmes

L.1.1 Relatifs à la conversion d'unités et à la notation scientifique

Exercice 1 Alpha du Centaure C est l'étoile la plus proche de nous. Elle se situe à 4,238 AL de nous. Combien de km cela fait-il ? Exprimez le résultat en notation scientifique. Combien de parsec (pc) cela fait-il ? Réponse : 1,33 pc.

Exercice 2 Quelle est la distance Terre-Soleil en km, en au et en AL ? Entre nous et l'étoile (autre que le Soleil) la plus proche, combien de fois peut-on mettre cette distance ? Réponses : $1{,}496 \cdot 10^8$ km, 1 au, 16 µAL et $268'228\times$.

Exercice 3 Combien y a-t-il de fois la distance entre nous et Alpha du Centaure dans le diamètre de notre galaxie la Voie Lactée ($\phi_{galaxie} = 80\,000$ AL) ? Réponse : $18'877\times$.

Exercice 4 Sous quel angle (en °, en $'$ et en $''$) voit-on le diamètre de la Lune depuis la Terre ($R_{Lune} = 0,2725 \cdot R_{Terre}$; $d_{Terre-Lune} = 3{,}84 \cdot 10^8$ m). Réponses : 0,5157°, $31'$ et $1860''$.

Exercice 5 La matière interstellaire est constituée de gaz neutre (hydrogène atomique et moléculaire), de gaz ionisé, de poussières et de particules cosmiques (électrons, protons, ...). La densité d'un nuage de gaz neutre est de $0{,}1 \cdot 10^4$ atomes/cm^3. Combien cela fait-il d'atomes par m^3 ? Par l ? Réponses : 10^9 atomes et 10^6 atomes.

Exercice 6 La première mesure du rayon de la Terre à été faite à Alexandrie en 235 avant notre ère par Ératosthène [a]. La méthode qu'il a utilisée est très simple. Il a tout d'abord observé qu'un certain jour de l'année le Soleil éclairait le fond d'un puits à Syène. Il en a déduit qu'à ce moment-là les rayons du Soleil alors parfaitement au zénith, pointaient directement vers le centre de la Terre (voir figure L.1). Par ailleurs, il a mesuré au même moment l'angle fait par ces mêmes rayons au sommet d'un bâton planté 5000 stades plus au nord, à Alexandrie. Comme le montre le schéma L.1, cet angle est l'angle au centre de la Terre que fait l'arc de cercle déterminé par la partie de méridien entre Syène et Alexandrie. Connaissant cet angle ($\alpha = 7{,}5°$) et la longueur de l'arc de cercle ($L = 5000$ stades), il en déduisit le rayon de la Terre avec une précision extraordinaire pour l'époque : 4 % d'écart avec la valeur connue aujourd'hui.

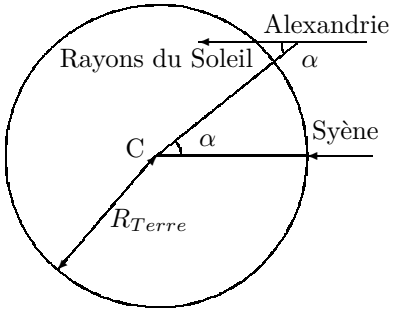
Sachant qu'un stade valait environ 160 m d'aujourd'hui, calculez le rayon R de la Terre obtenu par Ératosthène. Réponse : 6111,55 km.

L.1.2 Relatifs aux notions de déplacement, position et distance parcourue

Exercice 7 Un objet se déplace de la position $x = 0$ m à $x = 10$ m, puis à $x = 11$ m, puis à $x = -5$ m.

a. Voir *Mécanique*, Éric Lindemann, DeBoeck Université, 1999, p. 15,16.

Figure L.1 – *Le rayon de la Terre par Eratosthène*



Calculez le déplacement total et la distance totale parcourue. Réponses : −5 m et 27 m.

Exercice 8 Le conducteur d'une automobile qui se déplace à 120 km/h est inattentif pendant deux secondes. Quelle distance a-t-il parcourue pendant ce temps ? Réponse : 66,6 m.

Exercice 9 La position en mètres d'un objet est donné par l'équation suivante :

$$x = \begin{cases} 2 \cdot t & si\, 0 \leq t \leq 4s \\ 8 & si\, 4 \leq t \leq 6s \\ -2 \cdot t + 20 & si\, 6 \leq t \leq 10s \end{cases}$$

Calculez le déplacement et la distance parcourue au bout de 10 s. Réponses : 0 m et 16 m.

Exercice 10 Deux trains se dirigent l'un vers l'autre sur une même voie. Ils se déplacent à 100 km/h par rapport au sol. Si la distance initiale qui les séparait était de 12 km, combien de temps auront-ils roulé quand aura lieu l'accident ? Réponse : 0,06 h.

Exercice 11 Une voiture dont la vitesse est de 110 km/h se trouve 600 m derrière un camion dont la vitesse vaut 80 km h. Combien de temps mettra-t-elle pour rattraper le camion ? Réponse : 0,02 h.

L.1.3 Relatifs à la notion de vitesse

Exercice 12 Quelle est notre vitesse de rotation approximative à la surface de la Terre ? N'utilisez pas votre machine à calculer et faites tous vos calculs en notation scientifique. Réponse : 1600 km/h.

Exercice 13 Un joueur de pétanque tire la boule d'un adversaire. Celle-ci se trouve à 9 m de lui. En supposant que la boule se déplace en ligne droite, à vitesse constante et que le joueur entende le bruit du carreau sur la boule adverse 1,2 s après l'avoir lancée, trouvez la vitesse de la boule. Le son se propage à une vitesse de 343 m/s. Réponse : 7,666 m/s.

Exercice 14 Un objet se déplace de $x_1 = 3{,}6$ cm à $x_2 = -5{,}2$ cm dans l'intervalle de temps entre $t_1 = 3$ s et $t_2 = 6{,}8$ s. Déterminez sa vitesse moyenne. Réponse : −2,32 cm/s.

Exercice 15 Quelle est la vitesse de rotation de la Terre autour du Soleil en km/s ? La distance Terre-Soleil est de une unité astronomique (1 UA : le tableau A.2, page 166 en donne la correspondance dans l'unité du système international) et on suppose le mouvement circulaire. Réponse : 29,8 km/s.

Exercice 16 Grâce à la modélisation par ordinateur du squelette et des muscles des dinosaures[72], la longueur de la foulée du velociraptor a été établie à 3,058 m et celle du tyranosaure à 9,559 m. Le temps d'un cycle de marche a quant à lui été estimé à 0,284 s pour le velociraptor et 1,199 s pour le tyranosaure. Calculez la vitesse de ces deux dinosaures dans les unités du système international. Quelle vitesse cela représente-t-il en km/h ? Vous pouvez comparer ces vitesses à celle du sprinter de l'exercice 18. Réponses : 10,8 m/s = 38,8 km/h et 8 m/s = 28,7 km/h.

L.1.4 Relatif à la notion d'accélération

Exercice 17 Une voiture roulant à 50 km/h freine soudainement pour ne pas heurter un piéton. Si la décélération maximale moyenne que ses pneus peuvent lui permettre est de $-3\,m/s^2$ (route mouillée), en combien de temps s'arrêtera-t-elle ? Réponse : 4,63 s.

Exercice 18 Calculez l'accélération moyenne d'un sprinter [b] qui parvient à une vitesse de 10 m/s en 9,9 s. Réponse : 1,01 m/s^2.

Exercice 19 Déterminez l'accélération moyenne dans les cas suivants :

b. The physics of sports, A. Armenti, New York, 1992, p. 112.

— Un avion DC 10 qui part du repos atteint, en 50 s, une vitesse de 350 km/h au moment du décollage.
— Un avion s'approche d'un porte-avions à 190 km/h. Il se pose et est arrêté par un câble de retenue en 5 s.
— Une capsule spatiale passe d'une vitesse nulle à 1450 km/h en 3 s.

Réponses : 1,94 m/s^2, $-10{,}56$ m/s^2 et 134 m/s^2.

Exercice 20 A l'instant $t = 3$ s, une particule se trouve en $x = 7$ m à la vitesse de 4 m/s. A $t = 7$ s, elle est en $x = -5$ m à la vitesse de -2 m/s. Calculez sa vitesse et son accélération moyennes. Réponses : -3 m/s et $-1{,}5$ m/s^2.

L.1.5 Relatif au MRU

Exercice 21 Une voiture se déplace à la vitesse constante de 50 km/h pendant 5 min. Esquissez les graphes horaires de la position, de la vitesse et de l'accélération pendant cette période. Quelle est la distance totale parcourue ? Par quelle grandeur cette distance est-elle représentée sur le graphe de la vitesse en fonction du temps ? Réponse : 4167 m.

Exercice 22 Une voiture de sport se déplaçant à la vitesse constante de 160 km/h est prise en chasse par une voiture de police alors que celle-ci à 1 km de retard. Pour rattraper la voiture de sport, la voiture de police prend très rapidement une vitesse de 180 km/h. Au bout de combien de temps et de quelle distance la police rattrapera la voiture de sport ? Réponses : 0,05 h et 9 km.

L.1.6 Relatif au MRUA

Exercice 23 Une voiture de police à l'arrêt démarre la poursuite d'un chauffard lorsque celui-ci la dépasse à une vitesse de 144 km/h. Son accélération est alors de 5 m/s^2. En combien de temps et sur quelle distance rattrape-t-elle le chauffard ? Quelle est alors sa vitesse ? Réponses : 16 s, 640 m et 288 km/h.

Exercice 24 Une voiture entre en collision frontalement avec un arbre. Sa vitesse juste avant le choc était de 50 km/h. Elle est stoppée net sur une distance de 1,5 m (le moteur est complètement écrasé). Calculez la valeur de l'accélération (ici une décélération), exprimez-la comme un multiple de l'accélération terrestre g ($g = 9{,}81$ m/s^2) et calculez le temps que dure la collision. Réponses : $-64{,}3$ m/s$^2 = -6{,}55 \cdot g$ et 0,216 s.

Exercice 25 Le chauffeur d'une voiture roulant à 40 m/s aperçoit soudain un kangourou 70 m devant lui. Quel sera l'avenir de l'animal si le temps de réaction du chauffeur est de 0,8 s et sa décélération maximale de 8 m/s^2 ? Réponse : bien sombre.

Exercice 26 Un plongeur capable de sauter sur place très haut peut s'élever de 50 cm. Quelle doit être sa vitesse initiale (supposez que le mouvement est un MRUA d'accélération $g = 9{,}81$ m/s^2) ? Un dauphin peut s'élever lui 6 m au-dessus de l'eau. Quelle est sa vitesse verticale initiale ? Réponses : 11,3 km/h et 39 km/h.

Exercice 27 Un plongeur s'élance du haut de la plate-forme des dix mètres d'un plongeoir.

1. Combien de temps met-il pour arriver dans l'eau s'il se laisse tomber ?
2. Combien de temps met-il pour arriver dans l'eau si sa vitesse initiale est horizontale et vaut 1 m/s ?
3. Combien de temps met-il pour arriver dans l'eau si sa vitesse initiale est verticale vers le haut et vaut 1 m/s ?

Dans les cas 1 et 3, à quelle vitesse arrive-t-il dans l'eau ? Réponses : 1,43 s, 1,43 s et 1,53 s.

Exercice 28 Un objet est lâché à la surface de la terre d'une hauteur h. Déterminez la vitesse à laquelle il arrive au sol en fonction de h et de g. Réponse : $\sqrt{2 \cdot g \cdot h}$.

Exercice 29 Une voiture de course tente d'arriver en 4 s à 100 km/h départ arrêté. Déterminez quelle accélération (supposée constante) il lui faut pour cela et la distance qu'elle va parcourir. Réponses : 6,94 m/s^2 et 55,56 m.

Exercice 30 Une moto passe de 50 km/h à 100 km/h sur une distance de 59 m. A combien de g son conducteur est-il soumis ? Réponse : un demi g.

Exercice 31 Un plongeur s'élance de la plate-forme des cinq mètres avec une vitesse horizontale de 2 m/s.

1. Combien de temps mettra-t-il pour arriver dans l'eau ?
2. Si on suppose sa vitesse horizontale constante, à quelle distance du pied du bord de la plate-forme arrivera-t-il dans l'eau ?

Réponses : 1,01 s et 2,02 m.

Exercice 32 Une petite fusée d'enfant a pour deux minutes de carburant. Elle s'élève dans les airs à une vitesse moyenne de 3 m/s pendant la phase de poussée. A la fin de cette phase, sa vitesse atteint 4 m/s (son accélération n'est pas constante durant cette première phase). Calculez à quelle hauteur elle s'est élevée et combien de temps à duré son vol. Réponses : 360,8155 m et 128,98 s.

L.1.7 Relatifs à la physique aristotélicienne

Exercice 33 Un scooter se déplaçant à la vitesse de 5 km/h sur un lac gelé horizontal tire verticalement un petit obus éclairant. Il monte et retombe en 2 s. Déterminez, selon la théorie aristotélicienne du mouvement son lieu d'atterrissage sur le lac. A ce moment-là, déterminez sa distance au scooter. Réponse : 2,76 m.

Exercice 34 La vigie d'un trois-mâts laisse tomber son couteau. Il met 0,8 s pour arriver sur le pont. Le bateau se déplace à 8 km/h. Selon la théorie d'Aristote, déterminez à quelle distance du pied du mât il va se planter. Réponse : 1,78 m.

Exercice 35 Un touriste visitant Paris laisse tomber une pièce de cinq francs du haut du premier étage de la Tour Eiffel. En tenant compte de la vitesse de Paris autour le l'axe de rotation de la Terre et selon la cinématique d'Aristote, calculez la distance au pied du point de chute à laquelle la pièce va arriver au sol. Le temps de chute est de 2,1 s et la latitude de Paris vaut $\beta = 48°48'$. On ne tiendra compte que du déplacement de Paris dû à la rotation de la Terre sur elle-même. Réponse : 640,5 m.

L.1.8 Relatifs à la physique newtonienne

Pour résoudre un problème de mécanique newtonienne, aucune méthode n'est prescrite. Cependant, dans la mesure où le problème est bien posé (c'est là une étape particulièrement difficile à réaliser et pour laquelle il faut rester ouvert à toute bonne idée), une suite d'opérations assez bien définie permet de résoudre clairement le problème.

Attention, cette "procédure", qui présente beaucoup d'avantages, est aussi assez stricte pour éliminer des idées originales parfaitement valables et efficaces. Il faut donc l'utiliser sans dogmatisme. Elle consiste en ce qui suit :

Méthode de résolution des problèmes

Choisir le système. C'est l'étape la plus importante. Elle est fondamentale, car c'est du choix du système que dépend la possibilité d'exprimer les grandeurs nécessaires à la résolution du problème. En particulier, il faut choisir le système de manière à éliminer, dans la mesure du possible, les grandeurs qui sont inconnues et non nécessaires.

Choisir un système d'axes. Simple et, si possible, orienté dans le sens supposé de l'accélération. Cela permet d'éliminer un certain nombre de fautes de signe.

Faire un dessin avec forces extérieures. Il ne faut en oublier aucune. La détermination du caractère extérieur des forces en jeu est évidemment aussi une étape difficile. Mais elle est fondamentale.

Spécifier les contraintes sur le système. Par exemple : se déplace uniquement horizontalement.

Écrire les équations du mouvement. Il s'agit d'écrire la seconde loi de Newton sur chaque axe. Il faut donc décomposer les vecteurs forces et accélération sur ceux-ci.

Résoudre le problème. Vérifier que le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues. A l'aide des équations décrivant les contraintes et des équations du mouvement, résoudre alors le problème.

Vérifier la solution sur des cas simples. Par exemple, si on a obtenu l'accélération d'un objet sur un plan incliné, il faut vérifier que si celui-ci est vertical, alors l'accélération est celle de la chute libre.

Exercice 36 Une fusée d'une masse de 60 tonnes décolle verticalement. Au bout d'une minute, elle atteint la vitesse de 1000 km/h. En supposant l'accélération constante, calculez la force totale des moteurs. Réponse : 866 400 N.

Exercice 37 Une voiture tire une remorque à vitesse constante. Si la force de frottement qui s'exerce sur la remorque vaut 500 N, quelle est la force exercée par la voiture sur la remorque ? Quelle est la somme des forces qui s'exercent sur la remorque ? Répondez aussi à ces deux questions si la voiture a une accélération de $5\,\mathrm{m/s^2}$ et la remorque une masse de 500 kg. Réponses : 500 N, nulle, 3000 N et 2500 N.

Exercice 38 Un ascenseur de masse $m = 200\,\mathrm{kg}$, dans lequel une personne de 60 kg se trouve, monte avec une accélération de $4\,\mathrm{m/s^2}$. Quelle est la force exercée par le câble sur l'ascenseur ? Réponse : 3590,6 N.

Exercice 39 Une voiture de deux tonnes roulant à 50 km/h freine brusquement pour s'arrêter sur une distance de 40 m. Calculez la force de frottement des pneus et expliquez précisément d'où elle vient. Réponse : $-4822{,}5\,\mathrm{N}$.

Exercice 40 Un train de 300 tonnes (locomotive : 50 tonnes, wagons : 250 tonnes accélère de 0 à 10 km/h en une minute. On néglige les frottements.

1. Calculez la force F_{tot} nécessaire pour réaliser cette augmentation de vitesse.
2. Quelle force F la locomotive exerce-t-elle sur les wagons ?
3. Combien de temps durerait le démarrage si la locomotive n'avait pas de wagons (elle exerce la même force qu'au premier point) ?

Réponses : 13 889 N, 11 500 N et 10 s.

Exercice 41 On lance une balle de masse $m = 100\,\mathrm{g}$ vers le haut avec une vitesse $v_o = 2\,\mathrm{m/s}$. Si elle est soumise à une force de frottement $F_{fr} = 0{,}05\,\mathrm{N}$ pendant tout son vol, jusqu'à quelle hauteur monte-t-elle ? Réponse : 19,4 cm.

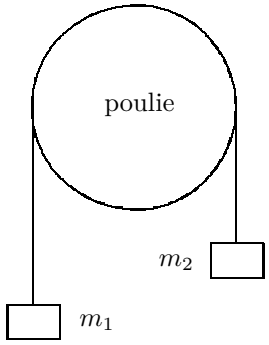
Exercice 42 Un vaisseau spatial d'une masse $m = 9\,\mathrm{t}$ se déplace à une vitesse $v_o = 10\,000\,\mathrm{km/h}$ pendant cinq minutes. Puis il enclenche ses moteurs. Ils lui fournissent une poussée P de 1000 N pendant 30 s. Quelle est la distance parcourue jusqu'au moment où il coupe ses moteurs ? Réponse : 916,7 km.

Exercice 43 Un électron initialement au repos est accéléré jusqu'à une vitesse de 1% de la vitesse de la lumière sur une distance de 30 m. Quelle est la force totale qui s'exerce sur lui ? Réponse : $1{,}37 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{N}$.

Exercice 44 Une araignée de masse $m = 5\,\mathrm{g}$ est suspendue par son fil au plafond. Elle ne bouge pas. Quelle force le fil exerce-t-il sur elle ? Elle se met à descendre en freinant sa chute à l'aide de son fil avec une force $F = 0{,}01\,\mathrm{N}$. Si elle descend d'une hauteur $d = 2\,\mathrm{m}$, combien de temps met-elle pour le faire et à quelle vitesse arrive-t-elle en bas ? Réponses : 0,716 s et 5,59 m/s.

Exercice 45 Une corde aux extrémités de laquelle sont suspendues deux masses $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$ et $m_2 = 3\,\mathrm{kg}$ est suspendue à une poulie (voir figure L.2). On lâche les masses (il s'agit de ce qu'on appelle une machine de Atwood). Quelle est leur accélération ? Réponse : $1{,}962\,\mathrm{m/s^2}$.

Figure L.2 – *La poulie ou machine de Atwood*



Exercice OS 1 Soit une masse m de 15 kg posée sur un plan horizontal sans frottements. On exerce sur elle une force F de 5 N, faisant un angle de 30° avec l'horizontale, dirigée vers le bas.

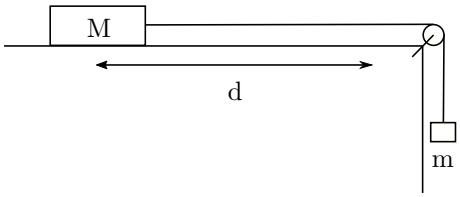
Calculez l'accélération du bloc et la valeur de la réaction du plan. Réponses : $0{,}29\,\mathrm{m/s^2}$ et 149,65 N.

Exercice OS 2 Une lampe de 7 kg est suspendue entre deux murs par deux câbles souples sans masse qui font un angle de 20° et 30°.

Quelles sont les tensions exercées par chaque câble sur les murs ? Réponses : 77,63 N et 84,24 N.

Exercice OS 3 Soient deux masses, la première, de valeur M=5 kg, posée sur un plan horizontal sans

Figure L.3 – *La masse pendante*



frottements et la seconde, m=2 kg, reliée à la première par une corde sans masse et pendant dans le vide, comme présenté sur la figure L.3.

On lâche la première à vitesse initiale nulle. Calculez la vitesse de la seconde alors que la première à parcouru une distance d=1 m. Réponse : 2,8 m/s.

Exercice OS 4 On lâche, à vitesse initiale nulle, une masse m de 3 kg, sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 20°$ sans frottements. Calculez sa vitesse après un temps t de 2 s. Réponse : 9,72 m/s.

Exercice OS 5 Une masse M = 5 kg glisse sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale. Elle est retenue, du côté du haut du plan incliné, par une corde inextensible sans masse passant sur une poulie, puis accrochée à une autre masse m = 3 kg, pendant librement.

Calculez l'accélération des masses et la tension dans la corde. Réponses : $-0{,}6\,\mathrm{m/s^2}$ et 27,6 N.

Exercice OS 6 Un parachutiste de 70 kg saute d'un avion et ouvre immédiatement son parachute. Sa vitesse augmente d'abord progressivement, puis se stabilise à une valeur à déterminer par le fait qu'en deçà de 2 m, une personne normale peut atterrir sans risque d'un saut à vitesse initiale nulle.

Calculez la vitesse de descente du parachutiste pour qu'il puisse atterrir en toute sécurité. Puis déterminez la tension exercée par le parachute sur le parachutiste pendant sa descente. Réponses : 6,26 m/s et 686,7 N.

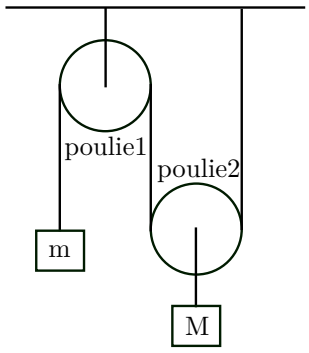
Exercice OS 7 Un ballon auquel est suspendu une nacelle de 100 kg soulève une masse de 80 kg accrochée sous la nacelle par une corde.

1. Il monte à vitesse constante. Calculez la force exercée par le ballon sur la nacelle et celle exercée par la corde sur la masse.
2. On lâche 20 kg de lest. Calculez l'accélération du ballon et les nouvelles force sur la nacelle et la masse.

Réponses : 1765,8 N, 784,8 N, $1{,}23\,\mathrm{m/s^2}$ et 882,9 N.

Exercice OS 8 Une poulie est accrochée au plafond par son axe de rotation. D'un côté elle soutient une masse m de 5 kg et de l'autre une autre poulie par l'intermédiaire d'une corde accrochée au plafond. À l'axe de rotation de cette dernière est suspendu une autre masse M de 5 kg. La figure L.4 présente la situation.

Figure L.4 – *Deux poulies*



Déterminez l'accélération de chaque masse. Réponses : $1{,}962\,\mathrm{m/s^2}$ et $3{,}924\,\mathrm{m/s^2}$.

Exercice OS 9 Reprenez la situation du problème 4, présenté à la figure L.13 pour calculer algébriquement l'expression des accélérations horizontales et verticales du bloc ainsi que la réaction du plan incliné. Réponses : $g\cos(\alpha)\sin(\alpha)$, $-g \cdot \sin(\alpha)$ et $R = m \cdot g\cos(\alpha)$.

Exercice OS 10 Une corde de longueur L et de masse M est posée sur une table sans frottement. Un quart de la longueur de celle-ci pend dans le vide au bord de la table quand on la lâche.

Calculez son accélération en fonction de la longueur l de la corde qui pend.

L.1.9 Relatifs aux forces

Exercice 46 Une personne de masse $m = 70\,\mathrm{kg}$ prend l'ascenseur. Elle se place sur une balance. Durant la première phase de montée, l'accélération

vaut $2\,\mathrm{m/s^2}$. Puis suit une phase à vitesse constante et enfin l'ascenseur décélère à $3\,\mathrm{m/s^2}$. Trouvez dans chaque cas la force exercée par la balance sur la personne (en divisant par l'accélération terrestre, on obtient la valeur que marquerait une balance sous les pieds de la personne). Réponses : 84,3 kg, 70 kg et 48,6 kg.

Exercice 47 Calculez la grandeur de la force exercée par deux boules de pétanque de masse $m = 1\,\mathrm{kg}$ l'une sur l'autre. Elles sont distantes de 0,5 m. Réponse : $2{,}668 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{N}$.

Exercice 48 Calculez la masse de la Terre. On donne $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ et le rayon terrestre moyen $R_T = 6370\,\mathrm{km}$. Réponse : $5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$.

Exercice 49 Calculez l'accélération de la pesanteur de la Lune avec les données des tables. Réponse : $1{,}62\,\mathrm{m/s^2}$.

Exercice 50 Quelle force faut-il exercer sur un ressort de constante $k = 800\,\mathrm{N/m}$ pour le déformer de 10 cm ? Réponse : 80 N.

Exercice 51 Quelle est la constante d'un ressort qui s'allonge de 12 cm lorsqu'on lui suspend une masse de 100 g ? Réponse : 8,175 N/m.

Exercice 52 Une voiture de deux tonnes roulant à 50 km/h freine brusquement pour s'arrêter sur une distance horizontale de 40 m. Calculez le cœfficient de frottement des pneus sur la route. Réponse : 0,25.

Exercice 53 Une voiture a une masse $m = 1000\,\mathrm{kg}$ dont 600 s'exercent sur les roues avant et 400 sur les roues arrière. Calculez l'accélération maximale de cette automobile si le cœfficient de frottement pneu-route vaut $\mu_o = 0{,}5$. La route est horizontale.

1. La traction se fait par les roues avant uniquement,
2. La traction est arrière,
3. C'est une traction quatre roues.

Réponses : $2{,}943\,\mathrm{m/s^2}$, $1{,}962\,\mathrm{m/s^2}$ et $4{,}905\,\mathrm{m/s^2}$.

Exercice OS 11 Un bloc d'une masse m de 13 kg est posé à la surface de Sedna. Le diamètre de cette planète naine est de 995 km et sa masse M d'environ $1 \cdot 10^{21}\,\mathrm{kg}$.

Calculez le rapport de poids pour la masse m entre la surface de Sedna et celle de la Terre. On peut supposer que l'accélération terrestre g vaut $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

Exercice OS 12 Le satellite de Jupiter nommé Io fait un tour autour de sa planète en 1,769 jours. Le rayon r de son orbite vaut 5,91 fois celui de Jupiter (le rayon R de Jupiter vaut 11,19 fois celui de la Terre).

Calculez la masse M de Jupiter en faisant l'hypothèse d'une trajectoire circulaire d'Io autour d'elle.

Exercice OS 13 Un bloc d'une masse m de 9 kg est sur le point de glisser sur un plan incliné d'un angle α égal à 32°. Calculez le cœfficient de frottement statique μ_0.

Le bloc se met soudain à glisser. Sachant que le cœfficient de frottement dynamique μ à une valeur de 5% inférieure au cœfficient statique, calculez l'accélération du bloc. Réponses : 0,62 et $0{,}29\,\mathrm{m/s^2}$

Exercice OS 14 Un bloc d'une masse m de 2 kg est posé sur un autre bloc d'une masse M de 5 k < gram. La masse M glisse sur un plan horizontal sans frottements. Les cœfficients de frottement statique et dynamique entre les deux masses ont la même valeur de 0,6. On tire sur le bloc supérieur avec une force F.

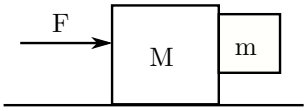
1. Calculez la valeur maximale de F pour que les blocs ne glissent pas l'un sur l'autre et calculez pour celle-ci l'accélération des deux blocs.
2. Pour une force double de la valeur maximale de F sans glissement, calculez l'accélération des deux blocs.

Réponses : 11,77 N, $1{,}68\,\mathrm{m/s^2}$, $2{,}35\,\mathrm{m/s^2}$ et $5{,}89\,\mathrm{m/s^2}$.

Exercice OS 15 Une locomotive de vingt tonnes se déplace à 50 km/h quand elle doit freiner en urgence. Calculez la différence de distance d'arrêt entre un freinage avec et sans glissement des roues, si les cœfficients de frottement statique et cinétiques valent 0,6 et 0,4 (acier sec). Réponse : 8,19 m.

Exercice OS 16 À l'aide d'un chariot d'une masse M de 4 kg, on désire déplacer une masse m de

Figure L.5 – *Déplacement d'un bloc suspendu*



3 kg en la poussant latéralement, mais sans qu'elle touche le sol, comme présenté à la figure L.5.

Si le cœfficient de frottement statique entre les deux blocs vaut 0,5 et que le frottement avec le sol est nul, calculez la force minimale qu'il faut exercer sur la masse M pour cela et calculez l'accélération des deux blocs. Réponse : 137,34 N.

Exercice OS 17 Un satellite en orbite basse (non géostationnaire) se trouve à une altitude de 5 km au-dessus de la surface de la Terre. À quelle vitesse par rapport au sol se déplace-t-il ?

Exercice OS 18 Un système binaire est constitué de deux étoiles

Exercice OS 19 Une étoile se déplace ... autour du centre de la Galaxie. Calculez la masse de La Galaxie.

L.1.10 Relatifs à l'énergie

Exercice 54 Un hélicoptère monte une masse de 50 kg avec une accélération de $4\,\mathrm{m/s^2}$ sur une distance de 100 m. Calculez le travail de la force de traction qui s'exerce sur la masse. Réponse : 69 050 J.

Exercice 55 Quelle est l'énergie potentielle de la masse du problème 54 à une hauteur de 100 m ? Quelle est son énergie cinétique à la même place si la vitesse initiale est nulle ? Réponses : 49 050 J et 20 022,25 J.

Exercice 56 Estimez l'énergie cinétique
- d'un coureur de 100 m de masse 80 kg,
- d'une voiture de masse 800 kg roulant à 10 m/s et
- d'une balle de fusil de 10 g se déplaçant à 800 m/s.

Réponses : 4000 J, 40 000 J et 3200 J.

Exercice 57 Calculez le travail du poids d'un objet de masse $m = 3\,\mathrm{kg}$ quand on le monte à vitesse constante de 4 m, le déplace de 5 m horizontalement, le redescend de 4 m et le ramène à sa position initiale. Calculez le travail pour chaque étapes et le travail total. Réponses : −117,72 J, 0, 117,72 J, 0 et 0.

Exercice 58 Calculez le travail produit par une force de 15 N s'exerçant constamment à 10° par rapport au déplacement. Celui-ci est rectiligne et d'une distance de 20 m. Réponse : 295,4 J.

Exercice OS 20 Un bobsleigh d'une masse totale de 600 kg descend une piste de 1800 m de long dont la ligne de départ est située à une altitude de 1000 m et celle d'arrivée à 800 m. Pendant une compétition, il fait 5 descentes. La masse du bob à vide est de 250 kg.

1. Quelle est l'énergie minimale que l'équipe qui l'utilise doit fournir pendant cette compétition pour véhiculer le bob du bas au haut de la piste ?
2. Quelle est l'énergie perdue par le bob pendant les descentes et d'où vient-elle ?
3. Estimez la force de frottement qui s'exerce sur le bob si on imagine que la vitesse moyenne du bob est de 80 km/h.

L.1.11 Relatifs à la conservation de l'énergie

Exercice 59 Sans l'aide de l'accélération, calculez la vitesse d'une personne qui a sauté (sans vitesse initiale) d'un plongeoir de 10 m et arrive dans l'eau. Réponse : 50,4 km/h.

Exercice 60 On lance verticalement vers le haut un objet de poids 100 N avec une vitesse initiale $v_o = 10\,\mathrm{m/s}$. A quelle hauteur h est-il momentanément arrêté ? Réponse : 5,1 m.

Exercice 61 Une tuile d'une masse de 2 kg se met à glisser du haut d'un toit dont le sommet se trouve à 30 m. Au moment où elle quitte le toit, sa hauteur vaut 25 m (on ne tient pas compte du frottement de la tuile sur le toit). Calculez la distance au pied du toit à laquelle la tuile arrivera au sol. L'angle du toit par rapport à l'horizontale vaut 15°. Réponse : 19,12 m.

Exercice 62 Une voiture de deux tonnes roulant horizontalement augmente sa vitesse de 5 à 10 km/h. Quelle est l'augmentation de son énergie cinétique ? Réponse : 5787 J.

L.1.12 Relatifs à l'énergie hydraulique

Exercice 63 Robinson Crusoé décide de s'éclairer en construisant une petite centrale électrique qui amène l'eau à travers une conduite forcée en bambou d'une hauteur de 22 m. Le débit étant de 30 l/s et le rendement faible de l'ordre de 40%, calculez combien d'ampoules de 40 W il pourra utiliser s'il branche simultanément un frigo de 1 kW et sa machine à laver de 1,2 kW. Réponse : 9.

Exercice 64 Le même Robinson Crusoé veut prélever 5% de l'eau de sa rivière (hauteur de chute 22 m, débit 30 l/s et $\eta = 40\%$) pour faire monter mécaniquement un petit ascenseur lui permettant de s'élever en 2 min de deux étages dans sa grotte. Si Robinson a une masse de 60 kg, que la hauteur d'un étage est de 2 m et que les frottements représentent 50% de l'énergie nécessaire pour monter, y parviendra-t-il ? Réponse : oui.

Exercice 65 On désire fournir 3000 kW h d'énergie pendant une année à chacun des ménages d'une ville de 30 000 habitants. Si le nombre moyen de personnes par ménage est de deux et demi, quel doit être le débit de la conduite d'eau d'une hauteur de 74 m nécessaire pour cela. Le rendement vaut $\eta = 90\%$. Quel type de turbine faut-il choisir ? Réponse : Francis.

L.1.13 Relatifs à l'énergie éolienne

Exercice 66 Un vent de force 4 sur l'échelle Beaufort, soufflant à 21,6 km/h, fait tourner une éolienne dont les pales ont une longueur de 22 m. Quelle est la puissance du vent qui traverse cette éolienne ? La masse volumique de l'air est : $\rho = 1{,}293\,\mathrm{kg/m^3}$. Réponse : 212,333 kW.

Exercice 67 Une éolienne a des pales dont l'extrémité tourne à une vitesse de 277,2 km/h et dont la longueur vaut 30 m. Sachant qu'elle tourne à 90% de la limite de Betz et que la vitesse du vent est de 32,4 km/h, calculez sa vitesse de rotation en tr/s et la puissance qu'elle fournit. La masse volumique de l'air est : $\rho = 1{,}293\,\mathrm{kg/m^3}$. Réponses : 0,41 tr/s et 710 kW.

Exercice 68 Un particulier désire alimenter la lampe de son petit cabanon de jardin avec une éolienne. En admettant que le vent moyen qui va la traverser souffle à 14,4 km/h (3 Beaufort), que la lampe nécessite une puissance de 40 W et que l'éolienne tourne à 40% de la limite de Betz, calculez la longueur des pales nécessaires. La masse volumique de l'air est : $\rho = 1{,}293\,\mathrm{kg/m^3}$. Réponse : 1,14 m.

L.1.14 Relatifs à l'énergie solaire

Exercice 69 On désire chauffer une masse de 100 l d'eau ($c_{eau} = 4180\,\mathrm{J\,°C/kg}$) en quatre heures. Quelle est la surface de panneaux solaire nécessaire. On donne $B = 0,8$, $K = 3\,\mathrm{W\,°C/m^2}$ et la différence de température entre l'intérieur et l'extérieur des capteurs $\Delta\theta = 20\,°\mathrm{C}$. La puissance du rayonnement incident est de $120\,\mathrm{W/m^2}$. Réponse : $16{,}2\,\mathrm{m^2}$.

Exercice 70 Quel est le débit d'eau ($c_{eau} = 4180\,\mathrm{J\,°C/kg}$) nécessaire pour évacuer l'énergie produite par $5\,\mathrm{m^2}$ de capteurs solaires thermiques caractérisés par $B = 0,7$, $K = 2\,\mathrm{W\,°C/m^2}$ et la différence de température entre l'intérieur et l'extérieur des capteurs $\Delta\theta = 15\,°\mathrm{C}$. La puissance du rayonnement incident est de $150\,\mathrm{W/m^2}$. Réponse : 21,6 l/h.

Exercice 71 Un particulier consomme 2500 kWh/an d'énergie électrique. Il désire produire lui-même une partie de cette énergie à l'aide de cellules solaires électriques. Il installe donc $8\,\mathrm{m^2}$ de panneaux photoélectriques. Cela lui permet-il de subvenir à ses besoins ? Sinon, quelle est la puissance d'appoint dont il a besoin ? Il se trouve dans une région où la puissance solaire incidente est de $160\,\mathrm{W/m^2}$. Réponses : non et 125,4 kW.

L.2 Solutions

1 Comme le nombre de km est 1000 fois plus petit que le nombre de mètres et que $1\,\text{AL} = 9{,}46 \cdot 10^{15}\,\text{m}$, on a :

$$\begin{aligned} 4{,}238\,\text{AL} &= 4,238 \cdot 9,46 \cdot 10^{15} \\ &= 4 \cdot 10^{16}\,m = 4 \cdot 10^{13}\,\text{km} \end{aligned}$$

Comme $1\,\text{pc} \approx 3 \cdot 10^{16}\,\text{m}$, on a :

$$4 \cdot 10^{16}\,\text{m} \approx \frac{4 \cdot 10^{16}}{3 \cdot 10^{16}} = 1{,}33\,\text{pc}$$

2 La distance Terre-Soleil vaut $1{,}496 \cdot 10^{11}\,\text{m}$. On a donc :

$$1{,}496 \cdot 10^{11}\,\text{m} = 1{,}496 \cdot 10^{8}\,\text{km}$$

Par ailleurs, par définition de l'unité astronomique (UA), on a :

$$1{,}496 \cdot 10^{11}\,\text{m} = 1\,\text{UA}$$

Finalement, avec $1\,\text{AL} = 9{,}46 \cdot 10^{15}\,\text{m}$, on a :

$$\begin{aligned} 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\text{m} &= \frac{1,496 \cdot 10^{11}}{9,46 \cdot 10^{15}} \\ &= 1{,}58 \cdot 10^{-5}\,\text{AL} \cong 16\,\mu\text{AL} \end{aligned}$$

L'exercice 1 nous indique que l'étoile la plus proche de nous est à 4,238 AL. On a donc :

$$\frac{4,238}{1,58 \cdot 10^{-5}} = 2,68 \cdot 10^{5} \times$$

Alpha du Centaure se trouve donc à $268'228\times$ la distance Terre-Soleil.

3 Le diamètre de notre galaxie est de 80 000 AL. L'exercice 1 nous indique que la distance à Alpha du Centaure vaut 4,238 AL. Ainsi, on a :

$$\frac{80'000}{4,238} = 18'877 \times$$

Le diamètre de la galaxie représente donc $18'877\times$ la distance à l'étoile la plus proche de nous.

4 La distance Terre-Lune est beaucoup plus grande que le diamètre de la Lune. L'angle est donc petit et on peut écrire la relation d'arc donnée par l'équation A.2 :

$$D = 2 \cdot R_{Lune} = d \cdot \alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{2 \cdot R_{Lune}}{d_{Terre-Lune}}$$

$$\alpha = \frac{2 \cdot 0,2725 \cdot 6,371 \cdot 10^{6}}{3,84 \cdot 10^{8}} = 0{,}009\,\text{rad}$$

Comme $180° = \pi\,\text{rad}$, l'angle considéré est :

$$\alpha = 0,009 \cdot \frac{180}{\pi} = 0{,}5157°$$

Comme un degré vaut soixante minutes d'arc, $1° = 60'$, on a :

$$\alpha = 0{,}5157° = 0,5157 \cdot 60 = 31'$$

et :

$$\alpha = 31' = 31 \cdot 60 = 1860''$$

5 Dans $1\,\text{m}^3$, on trouve $1000\,\text{dm}^3$ et $1 \cdot 10^{6}\,\text{cm}^3$. Ainsi, dans $1\,\text{m}^3$, on trouve un million de fois plus d'atomes que dans $1\,\text{cm}^3$. On a donc par m^3 :

$$nb\,atomes = 0,1 \cdot 10^{4} \cdot 10^{6} = 10^{9}\,\text{atomes}$$

Et par litre, c'est-à-dire par dm^3 :

$$nb\,atomes = 0,1 \cdot 10^{4} \cdot 10^{3} = 10^{6}\,\text{atomes}$$

6 La relation d'arc donnée par l'équation A.2 nous permet d'écrire :

$$L = R \cdot \alpha \;\Rightarrow\; R = \frac{L}{\alpha}$$

Avec la longueur L en m et l'angle α en rad :

$$L = 5000 \cdot 160 = 8 \cdot 10^{5}\,\text{m}$$

$$\alpha = 7,5 \cdot \frac{\pi}{180} = 0{,}13\,\text{rad}$$

Ainsi, le rayon de la Terre d'Ératosthène valait :

$$R = \frac{8 \cdot 10^{5}}{0,13} = 6\ 111\ 550\,\text{m} = 6111{,}55\,\text{km}$$

Sachant que la valeur actuelle du rayon moyen de la Terre vaut :

$$R_{Terre} = 6371{,}03\,\text{km}$$

à l'aide de l'équation D.1, on peut déterminer l'écart entre les deux valeurs :

$$e = \frac{6'371,03 - 6'111,55}{6'371,03} \cdot 100 = 4,1\%$$

7 Par définition, le déplacement se calcule par :

$$D = \Delta x = x_f - x_i = -5 - 0 = -5\,\text{m}$$

Et la distance parcourue est la distance réellement effectuée :

$$d = 10 + 1 + 11 + 5 = 27\,\text{m}$$

8 Pour passer de km/h en m/s, il faut diviser par un facteur de 3,6. En effet :

$$120\,\text{km h} = \frac{120 \cdot 10^3\, m/h}{3600\, s/h} = \frac{120}{3,6} = 33{,}3\,\text{m/s}$$

Ainsi, la distance parcourue en deux secondes est :

$$d = v \cdot t = 33,3 \cdot 2 = 66{,}6\,\text{m}$$

9 Comme la position au bout de 10 s se calcule par :

$$x(10\,s) = -2 \cdot 10 + 20 = 0\,\text{m}$$

le déplacement est donné par :

$$D = \Delta x = x_f - x_i = 0 - 0 = 0\,\text{m}$$

Selon l'équation de la position donnée ici, le mouvement de l'objet est le suivant :

1. à la vitesse constante de 2 m/s l'objet se déplace pendant 4 s,
2. il s'arrête de 4 à 6 s et
3. il revient en arrière à la vitesse de -2 m/s de 6 à 10 s.

Ainsi, l'objet parcourt dans un premier temps $2 \cdot 4 = 8$ m en avant et dans un second temps 8 m en arrière. La distance parcourue est donc :

$$d = 8 + 8 = 16\,\text{m}$$

10 Deux raisonnements sont possibles :

— On s'imagine être dans un train qu'on ne voit pas bouger. Sa vitesse par rapport à nous est nulle. L'autre train se trouve au départ à une distance de 12 km et se déplace par rapport à nous à une vitesse relative de 200 km/h (sa vitesse et notre vitesse sont cumulées). Ainsi, on peut écrire :

$$v = \frac{\Delta x}{t} \;\Rightarrow\; t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{12}{200} = 0{,}06\,\text{h}$$

— On définit le zéro du système d'axes à la position du premier train au moment où ils sont séparés de 12 km. L'équation de la position du premier train est alors :

$$x_1 = 100 \cdot t$$

Comme la position initiale du second train vaut 12 km et qu'il s'approche, sa vitesse est négative et l'équation de sa position au cours du temps est :

$$x_2 = -100 \cdot t + 12$$

La condition de rencontre s'écrit alors :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ 100 \cdot t &= -100 \cdot t + 12 \;\Rightarrow \\ 200 \cdot t &= 12 \;\Rightarrow\; t = \frac{12}{200} = 0{,}06\,\text{h} \end{aligned}$$

Le premier raisonnement se fait par rapport à l'un des objets en mouvement. Il est dit relatif. Le second raisonnement se fait par rapport à un référentiel commun : le sol. Il est dit absolu.

Mais quel que soit le référentiel, le résultat est le même.

11 Deux raisonnements sont possibles :

— On s'imagine être dans le camion qu'on ne voit pas bouger. Sa vitesse par rapport à nous est nulle. La voiture, elle, se trouve au départ à une distance de 0,6 km et se déplace par rapport à nous à une vitesse relative de $110 - 80 = 30$ km/h (sa vitesse est diminuée de notre vitesse, puisqu'on la fuit). Ainsi, on peut écrire :

$$v = \frac{\Delta x}{t} \;\Rightarrow\; t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{0,6}{30} = 0{,}02\,\text{h}$$

— On définit le zéro du système d'axes à la position de la voiture au moment où la voiture et le camion sont séparés de 0,6 km. L'équation de la position de la voiture est alors :

$$x_v = 110 \cdot t$$

Comme la position initiale du camion vaut 0,6 km et qu'il va dans la même direction que la voiture, l'équation de sa position au cours du temps est :

$$x_c = 80 \cdot t + 0,6$$

La condition de rencontre s'écrit alors :

$$\begin{aligned} x_v &= x_c \\ 110 \cdot t &= 80 \cdot t + 0,6 \Rightarrow \\ 30 \cdot t = 0,6 &\Rightarrow t = \frac{0,6}{30} = 0{,}02\,\text{h} \end{aligned}$$

Le premier raisonnement se fait par rapport à l'un des objets en mouvement. Il est dit relatif. Le second raisonnement se fait par rapport à un référentiel commun : le sol. Il est dit absolu.

Mais quel que soit le référentiel, le résultat est le même.

12 On sait que le rayon de la Terre vaut environ 6400 km. Sa circonférence vaut donc :

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r \approx 2 \cdot 3 \cdot 6'000 = 36\ 000\,\text{km} \approx 40\ 000\,\text{km}$$

Sa vitesse se calcule donc ainsi :

$$\begin{aligned} v = \frac{C}{t} &\approx \frac{40'000}{24} \approx \frac{40'000}{25} \\ &= 40'000 \cdot \frac{4}{100} = 400 \cdot 4 = 1600\,\text{km/h} \end{aligned}$$

En réalité, on a :

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6'371}{24} = 1668\,\text{km/h}$$

Ce qui correspond à un écart (équation D.1) de :

$$e = \frac{1668 - 1600}{1668} \cdot 100 = 4\%$$

Ce qui est un bon écart, compte tenu des grosses approximations faites.

13 Le temps donné t_{tot} est constitué du temps t_{boule} mis par la boule pour aller frapper celle de l'adversaire et du temps t_{son} mis par le son pour revenir se faire entendre par le joueur. On a donc :

$$t_{tot} = 1,2 = t_{boule} + t_{son}$$

Or, pour avoir la vitesse de la boule sur les 9 m de son parcours, il nous faut t_{boule}. Pour cela, il faut donc calculer t_{son}, qui est le temps mis pas le son pour parcourir 9 m à la vitesse de 343 m/s :

$$v = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{v} = \frac{9}{343} = 0{,}026\,\text{s}$$

Ainsi, le temps de parcours de la boule est :

$$t_{boule} = 1,2 - t_{son} = 1,2 - 0,026 = 1{,}174\,\text{s}$$

Et la vitesse de la boule est finalement :

$$v_{boule} = \frac{9}{1,174} = 7{,}666\,\text{m/s}$$

14 Par définition de la vitesse moyenne, on a tout simplement :

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-5,2 - 3,6}{6,8 - 3} = -2{,}32\,\text{cm/s}$$

15 Le rayon du cercle parcouru par le Soleil vaut donc en mètres :

$$\begin{aligned} d_{Terre-Soleil} &= 1\,\text{UA} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\text{m} \\ &= 1{,}496 \cdot 10^{8}\,\text{km} \end{aligned}$$

La distance parcourue par le Soleil est donc de :

$$d = 2 \cdot \pi \cdot d_{Terre-Soleil} = 9{,}4 \cdot 10^{8}\,\text{km}$$

Comme la période de rotation T, c'est-à-dire le temps mis par la Terre pour faire un tour autour du Soleil, est d'une année, soit 365 jours, la vitesse moyenne est :

$$v = \frac{d}{T} = \frac{9,4e8}{365 \cdot 24 \cdot 3600} = 29{,}8\,\text{km/s}$$

16 On a simplement pour le velociraptor :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{3,058}{0,284} = 10{,}8\,\text{m/s} = 38{,}8\,\text{km/h}$$

Et pour le tyranosaure :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{9,559}{1,199} = 8\,\text{m/s} = 28{,}7\,\text{km/h}$$

La comparaison montre que la vitesse d'un sprinter ($10\,\text{m/s} = 36\,\text{m/s}$ est légèrement inférieure à celle d'un velociraptor.

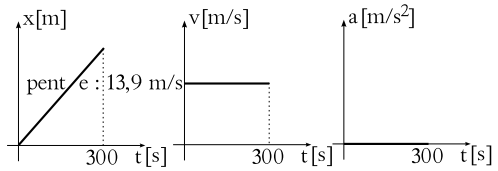
17 Par définition de l'accélération, on a :

$$\begin{aligned} a = \frac{v_f - v_i}{t} &\Rightarrow \\ t = \frac{v_f - v_i}{a} &= \frac{0 - 50/3,6}{-3} = 4{,}63\,\text{s} \end{aligned}$$

18 On a simplement :

$$a = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{10 - 0}{9,9} = 1{,}01\,\text{m/s}^2$$

Figure L.6 – *Graphes horaires du MRU.*



19 On a successivement :

— pour le DC 10 :

$$a = \frac{350/3,6 - 0}{50} = 1,94\,\mathrm{m/s^2}$$

— pour l'avion sur le porte-avions :

$$a = \frac{0 - 190/3,6}{5} = -10,56\,\mathrm{m/s^2}$$

C'est une décélération et l'accélération est donc négative.

— pour la capsule spatiale :

$$a = \frac{1450/3,6 - 0}{3} = 134\,\mathrm{m/s^2}$$

20 Par définition de la vitesse moyenne, on a :

$$v = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{-5 - 7}{7 - 3} = -3\,\mathrm{m/s}$$

Par définition de l'accélération moyenne, on a :

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{-2 - 4}{7 - 3} = -1,5\,\mathrm{m/s^2}$$

21 Les graphes sont présentés à la figure L.6.

La distance totale parcourue se calcule simplement :

$$d = v \cdot t = \frac{50}{3,6} \cdot 5 \cdot 60 = 4167\,\mathrm{m}$$

Sur le graphe de la vitesse en fonction du temps, la distance parcourue apparaît simplement être l'aire sous le graphe. En effet, la base $t = 5 \cdot 60 = 300\,\mathrm{s}$ multipliée par la hauteur $v = 50/3,6 = 13,9\,\mathrm{m/s}$ donne bien la distance parcourue.

22 On va décrire mathématiquement le mouvement des voitures de sport et de police.

Les deux mouvements sont des MRU. On peut donc écrire, dans un système d'axes dont l'origine est sur la voiture de police au moment où elle entame sa poursuite :

$$v_{police} = 180 \cdot t$$
$$v_{sport} = 160 \cdot t + 1$$

La condition de rencontre s'écrit alors :

$$v_{police} = v_{sport} \;\Rightarrow\; 180 \cdot t = 160 \cdot t + 1 \;\Rightarrow$$
$$20 \cdot t = 1$$
$$t = \frac{1}{20} = 0,05\,\mathrm{h}$$

La voiture de police se trouve alors à une distance de l'origine du système d'axes de :

$$x_{police} = 180 \cdot 0,05 = 9\,\mathrm{km}$$

Alors que la voiture de sport est à la même place :

$$x_{sport} = 160 \cdot 0,05 + 1 = 9\,\mathrm{km}$$

Ce qu'il fallait montrer.

23 Ici, aucune symétrie n'est présente. Comme les deux voitures ne sont pas à vitesse constante, on ne peut calculer de vitesse relative pour résoudre le problème. Il faut donc procéder en décrivant les deux mouvements par rapport au sol. Ainsi, avec $144\,\mathrm{km/h} = 40\,\mathrm{m/s}$, on peut écrire :

$$MRU \;\Rightarrow\; x_{chauffard} = 40 \cdot t$$
$$MRUA \;\Rightarrow\; x_{police} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot t^2$$

La condition de rencontre permet alors de trouver le temps cherché :

$$x_{chauffard} = x_{police} \;\Rightarrow$$
$$40 \cdot t = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot t^2 \;\Rightarrow$$
$$40 = 2,5 \cdot t \;\Rightarrow\; t = 16\,\mathrm{s}$$

car la solution $t = 0\,\mathrm{s}$ est à rejeter. En effet, elle correspond au début de la poursuite.

La position à laquelle se trouvent les deux voitures, qui est en même temps la distance qu'elles ont parcourues, est alors :

$$x_{chauffard} = 40 \cdot 16 = 640\,m$$
$$x_{police} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 16^2 = 640\,\mathrm{m}$$

Les deux positions sont bien évidemment les mêmes.

Quant aux vitesse lors de la rencontre, elles sont :

$$v_{chauffard} = 40\,m/s = 144\,km/h$$
$$v_{police} = 5 \cdot 16 = 80\,\text{m/s} = 288\,\text{km/h}$$

24 On fait l'hypothèse d'un MRUA. La voiture est stoppée sur une distance de 1,5 m. On peut donc écrire :

$$v^2 = v_o^2 + 2 \cdot a \cdot d \;\Rightarrow$$
$$0^2 = (\frac{50}{3,6})^2 + 2 \cdot a \cdot 1,5 \;\Rightarrow$$
$$a = -\frac{13,89^2}{3} = -64{,}3\,\text{m/s}^2 = -6,55 \cdot g$$

Le temps de collision est donc de :

$$a = \frac{v_f - v_i}{t} \;\Rightarrow$$
$$t = \frac{v_f - v_i}{a} = \frac{0 - 50/3,6}{-64,3} = 0{,}216\,\text{s}$$

25 Oublions la position du kangourou et calculons la distance totale d'arrêt d_t. Elle se compose de la distance de réaction d_r et la distance de freinage d_f :

$$d_t = d_r + d_f$$

Pour la distance de réaction, on a :

$$d_r = v \cdot t = 40 \cdot 0,8 = 32\,\text{m}$$

Pour la distance de freinage, il faut faire l'hypothèse d'un MRUA. Comme le mouvement est une décélération, c'est-à-dire un freinage, l'accélération est négative, et on a :

$$v^2 = v_o^2 + 2 \cdot a \cdot d_f \;\Rightarrow$$
$$0^2 = 40^2 + 2 \cdot (-8) \cdot d_f \;\Rightarrow$$
$$d_f = \frac{40^2}{16} = 100\,\text{m}$$

Ainsi, la distance totale d'arrêt vaut :

$$d_t = 32 + 100 = 132\,\text{m}$$

Comme le kangourou se trouve à 70 m, son avenir serait bien sombre s'il n'avait pas cette prodigieuse capacité à rebondir.

26 Un objet qui n'est soumis qu'à son poids est en chute libre, même s'il monte. Ainsi, l'accélération du plongeur, comme du dauphin, dans sa phase d'ascension vaut $-9{,}81\,\text{m/s}^2$. En effet, on a une décélération. Comme celle-ci est constante et que la vitesse au sommet est nulle, on peut écrire pour le plongeur :

$$v^2 = v_o^2 + 2 \cdot a \cdot h \;\Rightarrow$$
$$0^2 = v_o^2 + 2 \cdot (-9,81) \cdot 0,5 \;\Rightarrow$$
$$v_o = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,5} = 3{,}132\,\text{m/s} = 11{,}3\,\text{km/h}$$

Et de la même manière, pour le dauphin :

$$v_o = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 6} = 10{,}85\,\text{m/s} = 39\,\text{km/h}$$

27 Le plongeur est en chute libre. Son accélération vaut donc $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$. On fixe un axe vertical dont l'origine se situe à 10 m et qui pointe vers le bas. On peut alors écrire :

$$x = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_{o\,verticale} \cdot t \;\Rightarrow$$
$$10 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot t^2 + v_{o\,verticale} \cdot t$$

Avec dans le premier cas, comme dans le second, une vitesse initiale verticale nulle, on peut écrire :

$$10 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot t^2 \;\Rightarrow$$
$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{9,81}} = 1{,}43\,\text{s}$$

Ce qui donne une vitesse juste avant d'entrer dans l'eau de :

$$v = a \cdot t = 9,81 \cdot 1,43 = 14\,\text{m/s} = 50{,}5\,\text{km/h}$$

Le premier et le second cas ne sont pas différents du point de vue du temps de chute. Néanmoins, la distance parcourue par le plongeur qui se déplace horizontalement est plus grande que celle du plongeur qui se laisse tomber. Mais sa vitesse totale (horizontale et verticale) est aussi plus grande. On peut ainsi comprendre qu'ils arriveraient en bas simultanément s'ils partaient en même temps.

Le troisième cas est plus complexe puisqu'il faut tenir compte d'une vitesse $v_o = -1\,\text{m/s}$ dans le sens contraire de l'axe :

$$10 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot t^2 - 1 \cdot t \;\Rightarrow$$
$$0 = 4,905 \cdot t^2 - t - 10$$

Ce qui constitue une équation à une inconnue (t), mais du second degré. Sa solution est donnée par :

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 4,905 \cdot (-10)}}{2 \cdot 4,905} = \frac{1 \pm 14}{9,81} = \begin{cases} 1{,}53\,\text{s} \\ -1{,}33\,\text{s} \end{cases}$$

Évidemment, la solution négative est à rejeter et la solution positive est supérieure au temps de chute calculé précédemment puisque le plongeur parcourt une certaine distance vers le haut avant de tomber.

En ce qui concerne la vitesse, dans le troisième cas on peut simplement déterminer la vitesse par :

$$v = a \cdot t = 9,81 \cdot 1,53 - 1 = 14\,\text{m/s} = 50{,}5\,\text{km/h}$$

Ce qui donne la même valeur que précédemment en raison de la faible vitesse verticale initiale et de l'arrondi. Celle-ci doit cependant être comptée et doit l'être négativement ($v_o = -1\,\text{m/s}$), car elle est vers le haut alors que l'axe est vers le bas.

28 Cet objet est en chute libre. Son accélération vaut donc g. On peut écrire pour un MRUA :

$$v^2 = v_o^2 + 2 \cdot a \cdot h \;\Rightarrow\; v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

29 Par définition de l'accélération, on a :

$$a = \frac{v - v_o}{t} = \frac{100/3,6 - 0}{4} = 6{,}94\,\text{m/s}^2$$

La distance parcourue est alors :

$$d = \frac{1}{2} \cdot 6,94 \cdot 4^2 = 55{,}56\,\text{m}$$

30 Le temps n'est pas donné. On doit donc écrire :

$$v^2 = v_o^2 + 2 \cdot a \cdot d \;\Rightarrow\; (100/3,6)^2 = (50/3,6)^2 + 2 \cdot a \cdot 59 \;\Rightarrow\; a = \frac{(100/3,6)^2 - (50/3,6)^2}{2 \cdot 59} = 4{,}905\,\text{m/s}^2$$

Ce qui représente une accélération d'un demi g.

31 Le temps de chute est le même que celui d'un objet tombant verticalement. En effet, seul le poids est présent et l'objet est en chute libre. Ainsi, on peut écrire :

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \;\Rightarrow\; 5 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot t^2 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{9,81}} = 1{,}01\,\text{s}$$

Si la vitesse horizontale est constante, on peut encore écrire pour la distance horizontale d parcourue :

$$d = v_{horiz} \cdot t = 2 \cdot 1,01 = 2{,}02\,\text{m}$$

32 Commençons par calculer la distance qu'elle a parcouru pendant la phase de poussée. Pour cela, on a la vitesse moyenne $\overline{v}$ et le temps que dure le mouvement. Ainsi, on peut poser :

$$d_{poussée} = \overline{v} \cdot t = 3 \cdot 2 \cdot 60 = 360\,\text{m}$$

A ce moment-là, au bout de deux minutes et à 360 m d'altitude, la poussée cesse (le moteur s'arrête). Si on imagine un axe y orienté vers le haut et dont l'origine se situe au sol, on a donc une fusée qui se situe en $y_o = 360\,\text{m}$ avec une vitesse $v_o = 4\,\text{m/s}$ et qui n'est plus soumise qu'à son poids. Elle est donc en chute libre, même si elle monte, et son accélération dirigée vers le bas, dans le sens contraire du mouvement, est une décélération qui vaut : $g = -9{,}81\,\text{m/s}^2$. Pendant quelques instants, elle va donc encore monter jusqu'à s'arrêter. Pour calculer la distance sur laquelle elle s'arrête, comme on ne dispose pas du temps qu'elle met pour le faire, on doit écrire :

$$v^2 = v_o^2 + 2 \cdot a \cdot d \;\Rightarrow\; 0^2 = 4^2 + 2 \cdot (-9,81) \cdot d \;\Rightarrow\; d = \frac{16}{2 \cdot 9,81} = 0{,}8155\,\text{m} = 81{,}55\,\text{cm}$$

Ainsi la hauteur totale à laquelle est parvenue la fusée vaut :

$$h_{tot} = 360 + 0,8155 = 360{,}8155\,\text{m}$$

Pour déterminer le temps de vol, on dispose en premier lieu du temps de poussée qui est de deux minutes. Il faut encore calculer le temps de chute de la fusée entre le moment ou la poussée cesse et celui

ou elle arrive au sol. Pour cela, il faut écrire :

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 + v_o\cdot t + y_o \;\Rightarrow \\ y &= \frac{1}{2}\cdot(-9,81)\cdot t^2 + 4\cdot t + 360 \;\Rightarrow \\ 0 &= -4,905\cdot t^2 + 4\cdot t + 360 \end{aligned}$$

car on cherche le temps mis pour arriver au sol, soit à $y = 0$. C'est une équation du second degré à une inconnue, dont la solution est :

$$\begin{aligned} t &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot(-4,905)\cdot 360}}{2\cdot(-4,905)} \\ &= \frac{-4 \pm 84,14}{-9,81} = \begin{cases} -8{,}17\,\text{s} \\ 8{,}98\,\text{s} \end{cases} \end{aligned}$$

La solution $t = 8{,}98\,\text{s}$ est évidemment la bonne.

Le temps total est donc finalement de :

$$t_{tot} = 2\cdot 60 + 8,98 = 128{,}98\,\text{s} \simeq 2\,\text{min}9\,\text{s}$$

33 Pour Aristote, au moment où l'obus est sorti du canon, plus aucune action horizontale vers l'avant ne s'exerce sur lui. Il cessera donc de se déplacer horizontalement et retombera exactement là où il a quitté le canon.

Pendant l'élévation et la chute de l'obus, le scooter avance à vitesse constante. La distance dont il s'est déplacé par rapport à l'obus (qui n'a selon Aristote pas bougé horizontalement) est donc de :

$$d = v\cdot t = \frac{5}{3,6}\cdot 2 = 2{,}76\,\text{m}$$

34 Rappelons que selon Aristote, dès le moment où on a lâché le couteau, plus aucune force horizontale ne s'exerce sur lui et il va tomber parfaitement verticalement. Or, le bateau avance pendant ce temps. La distance au pied du mât à laquelle tombe le couteau est donc de :

$$d = v\cdot t = \frac{8}{3,6}\cdot 0,8 = 1{,}78\,\text{m}$$

35 Pour connaître la vitesse de rotation de la Terre à Paris, il faut connaître la distance parcourue en 24 h. Pour cela, il faut connaître sa distance r à l'axe de rotation de la Terre (voir figure L.7). On a d'après la figure L.7 que :

$$r = R\cdot\cos(\beta) = 6'371\cdot\cos(48,8°) = 4197\,\text{km}$$

Figure L.7 – *Chute aristotélicienne de la tour Eiffel.*

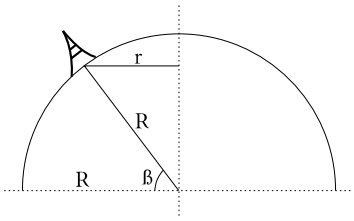
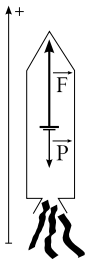


Figure L.8 – *Une fusée.*



car :

$$\begin{aligned} R &= R_{Terre} = 6371\,\text{km} \\ \beta &= 48°48' = 48{,}8° \end{aligned}$$

Ainsi, la vitesse de la tour Eiffel est :

$$\begin{aligned} v &= \frac{2\cdot\pi\cdot r}{t} = \frac{2\cdot\pi\cdot 4'197}{24} \\ &= 1099\,\text{km/h} = 305\,\text{m/s} \end{aligned}$$

et, selon Aristote, pendant la chute de la pièce, la Tour Eiffel devrait s'être déplacée de :

$$d = v\cdot t = 305\cdot 2,1 = 640{,}5\,\text{m}$$

Ce n'est évidemment pas le cas. L'inertie de la pièce l'en empêche.

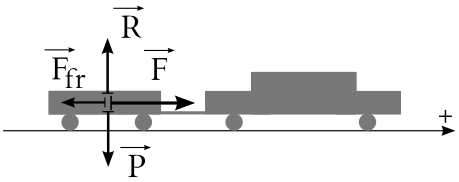
36 Le schéma de la situation est donné dans la figure L.8. La seconde équation de Newton s'écrit :

$$\vec{F} + \vec{P} = m\cdot\vec{a}$$

En projection sur l'axe et en raison de la définition du poids, on a :

$$F - P = m\cdot a \;\Rightarrow\; F = m\cdot a + m\cdot g$$

Figure L.9 – *Une remorque*



Or, comme l'accélération vaut :

$$a = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{1000/3,6 - 0}{60} = 4{,}63\,\mathrm{m/s^2}$$

on a :

$$F = 60 \cdot 10^3 \cdot 4,63 + 60 \cdot 10^3 \cdot 9,81 = 866\ 400\,\mathrm{N}$$

37 Le schéma de la situation est donné par la figure L.9.

La remorque avance à vitesse constante. La première loi de Newton nous indique alors que la somme des forces qui s'exercent sur elle est nulle. On peut considérer successivement le cas des forces verticales et celui des forces horizontales.

Verticalement, la position de la voiture ne change pas. Elle est verticalement à l'arrêt. La réaction du sol $\overrightarrow{R}$ est donc égale en grandeur, mais opposée, au poids $\overrightarrow{P}$, comme présenté dans la figure L.9.

Horizontalement par contre, la remorque se déplace. Mais elle le fait à vitesse constante et donc, là encore, la somme des forces horizontales qui s'exercent sur elle est nulle. La force de frottement $\overrightarrow{F}_{fr}$ est égale en grandeur et opposée à la force $\overrightarrow{F}$ exercée par la voiture pour tirer la remorque. Ainsi :

$$F = F_{fr} = 500\,\mathrm{N}$$

Si la voiture a une accélération, la situation des forces verticales ne change pas. On a toujours : $\overrightarrow{R} = -\overrightarrow{P}$. Par contre, la sommes des forces horizontales n'est plus nulle. On a, selon l'axe de la figure L.9 :

$$\begin{aligned} F - F_{fr} = m \cdot a \ &\Rightarrow \\ F = m \cdot a + F_{fr} &= 500 \cdot 5 + 500 = 3000\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

et la somme des forces qui s'exercent sur la remorque est :

$$F - F_{fr} = m \cdot a = 500 \cdot 5 = 2500\,\mathrm{N}$$

38 Ce problème est identique au problème 36 de la fusée. Il suffit de remplacer la fusée par l'ascenseur et de considérer la force de propulsion de la fusée comme la force de traction du câble. Considérons donc la figure L.8. Selon l'axe considéré, on a :

$$\begin{aligned} F - P = m \cdot a \ &\Rightarrow \\ F = m \cdot a + m \cdot g &= 260 \cdot 4 + 260 \cdot 9,81 \\ &= 3590{,}6\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

39 Pour que la voiture ralentisse, il faut que la force qui s'exerce sur elle soit vers l'arrière. C'est la force de frottement du sol sur les roues qui la freine. En effet, sur la glace elle ne s'exerce pas et la voiture ne peut freiner.

Tant la force que l'accélération sont donc dirigées vers l'arrière. La décélération se calculant par :

$$\begin{aligned} v^2 = v_o^2 + 2 \cdot a \cdot d \ &\Rightarrow \\ a = \frac{0^2 - (50/3,6)^2}{2 \cdot 40} &= -2{,}4\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

on trouve aisément la force de frottement de la route sur les pneus qui ralentit la voiture :

$$F_{fr} = m \cdot a = 2000 \cdot (-2,4) = -4822{,}5\,\mathrm{N}$$

Elle est négative, donc bien dirigée vers l'arrière.

40 Ce problème illustre bien l'importance du choix du système. Comme tout se déroule horizontalement, on ne va considérer que les forces horizontales. Les verticales existent, mais n'interviennent pas.

1. Comme on cherche la force nécessaire à l'augmentation de vitesse du train dans son entier, considérons pour système le train entier. Sa masse totale est $M = 300 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$. Son accélération est :

   $$a = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{10/3,6 - 0}{60} = 0{,}046\,\mathrm{m/s^2}$$

   On peut donc écrire :

   $$F_{tot} = M \cdot a = 300 \cdot 10^3 \cdot 0,046 = 13\ 889\,\mathrm{N}$$

2. Cette fois-ci, on cherche la force exercée sur une partie du train : les wagons. On ne va donc considérer comme système que les wagons. Une seule force F les tire vers l'avant avec la même accélération que celle du train

dans son ensemble. Leur masse est $m = 250 \cdot 10^3\,\text{kg}$. On a donc :

$$F = m \cdot a = 250 \cdot 10^3 \cdot 0,046 = 11\ 500\,\text{N}$$

Valeur inférieure à celle du point précédent, car il ne faut pas tirer la locomotive.

3. Ici, le système est évidemment la locomotive seule de masse $m' = 50 \cdot 10^3\,\text{kg}$. On peut donc calculer l'accélération :

$$F_{tot} = m' \cdot a \ \Rightarrow$$
$$a = \frac{F_{tot}}{m'} = \frac{13'889}{50 \cdot 10^3} = 0{,}28\,\text{m/s}^2$$

et finalement le temps :

$$a = \frac{v_f - v_i}{t} \ \Rightarrow\ t = \frac{10/3{,}6 - 0}{0,28} = 10\,\text{s}$$

41 Pendant la montée, la balle subit deux forces extérieures vers le bas : son poids $P = m \cdot g$ et la force de frottement F_{fr}. En prenant un axe vertical dirigé vers le haut, on peut donc écrire :

$$\sum F^{ext} = -m \cdot g - F_{fr} = m \cdot a \ \Rightarrow$$
$$-0,1 \cdot 9,81 - 0,05 = 0,1 \cdot a \ \Rightarrow$$
$$a = -10{,}31\,\text{m/s}^2$$

La balle a donc une décélération constante. Ainsi il s'agit d'un MRUA et, connaissant les vitesses initiale et finale et l'accélération, on peut écrire :

$$v^2 = v_o^2 + 2 \cdot a \cdot h \ \Rightarrow$$
$$0 = 2^2 - 2 \cdot 10,31 \cdot h \ \Rightarrow$$
$$h = 0{,}194\,\text{m} = 19{,}4\,\text{cm}$$

Évidemment, elle monte moins haut que s'il n'y avait pas de frottements.

42 La première phase du mouvement se déroule à vitesse constante. La distance parcourue pendant cinq minutes, c'est-à-dire $1/12\,h$, est donc donnée par :

$$d_{MRU} = v_o \cdot t = 10'000 \cdot \frac{1}{12} = 833{,}3\,\text{km}$$

La seconde phase du mouvement se déroule à accélération constante. En effet, la force de poussée et la masse étant constantes, on peut écrire :

$$\sum F^{ext} = P = m \cdot a \ \Rightarrow$$
$$1000 = 9'000 \cdot a \ \Rightarrow$$
$$a = 0{,}111\,\text{m/s}^2$$

Connaissant l'accélération, on peut ensuite calculer la distance parcourue en MRUA grâce au temps de poussée :

$$d_{MRUA} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_o \cdot t$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 0,111 \cdot 30^2 + \frac{10'000}{3,6} \cdot 30$$
$$= 83'383,3\,m = 83{,}4\,\text{km}$$

Au total, la distance parcourue est donc de :

$$d_{tot} = d_{MRU} + d_{MRUA} = 833,3 + 83,4 = 916{,}7\,\text{km}$$

43 Son accélération, supposée constante, est donnée par :

$$v^2 = v_o^2 + 2 \cdot a \cdot d \ \Rightarrow$$
$$(0,01 \cdot 3 \cdot 10^8)^2 = 0^2 + 2 \cdot a \cdot 30 \ \Rightarrow$$
$$a = 1{,}5 \cdot 10^{11}\,\text{m/s}^2$$

La force totale qui s'exerce sur lui est alors donnée par :

$$F_{tot} = m \cdot a = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,5 \cdot 10^{11} = 1{,}37 \cdot 10^{-19}\,\text{N}$$

44 Tant que l'araignée ne bouge pas, la force exercée par le fil est égale à son poids, c'est-à-dire :

$$F = m \cdot g = 0,005 \cdot 9,81 = 0{,}049\,\text{N}$$

Pendant sa chute, la seconde loi de Newton permet d'écrire, en utilisant un axe dans le sens de la chute :

$$\sum F^{ext} = m \cdot g - F = m \cdot a \ \Rightarrow$$
$$0,005 \cdot 9,81 - 0,01 = 0.005 \cdot a \ \Rightarrow$$
$$a = 7{,}81\,\text{m/s}^2$$

Avec une vitesse initiale nulle, le temps de chute sur une hauteur de 2 m est :

$$h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \ \Rightarrow$$
$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{7,81}} = 0{,}716\,\text{s}$$

Et la vitesse finale est alors :

$$v = a \cdot t = 7,81 \cdot 0,716 = 5{,}59\,\text{m/s}$$

45 L'ensemble se comporte comme un système en une dimension dont l'accélération se fait dans le sens de la masse la plus grande et qui est freiné par la masse la plus faible. Si on définit le sens positif de l'axe dans le sens du mouvement, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\sum F^{ext} = m_2 \cdot g - m_1 \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a \ \Rightarrow \\ 3 \cdot 9,81 - 2 \cdot 9,81 = (2+3) \cdot a \ \Rightarrow \\ a = 1{,}962\,\mathrm{m/s^2}\end{aligned}$$

L'analyse ci-dessus se base sur le système composé des deux masses et de la corde. Ce choix fait des tensions dans la corde des forces intérieures et esquive donc leur détermination.

Sans que cela soit nécessaire ici, il est intéressant de les considérer. Pour cela, considérons comme système la masse de 3 kg. Sur celle-ci s'exerce son poids P vers le bas et la force T exercée par la corde vers le haut. En première analyse, on peut penser que cette dernière, qui retient le système dans sa chute, est égale au poids de la seconde masse. Cependant, si c'est le cas, selon la troisième loi de Newton, la force exercée par le système sur la corde, réaction de T, serait égale au poids de la seconde masse. Le système constitué par la corde et la seconde masse ne serait alors soumis qu'à deux forces extérieures de valeurs égales ! Celui-ci ne pourrait donc pas accélérer. On peut donc en conclure que T n'est pas égale au poids de la seconde masse.

Par ailleurs, faut-il parler des tensions ou de la tension dans la corde ? Pour le savoir, considérons un petit bout de corde Δl de masse Δm. Sans compter le poids du petit bout de corde, deux forces extérieures opposées ΔT_1 et ΔT_2 s'exercent de chaque côté de celui-ci. Celles-ci sont forcément inégales, en raison de l'accélération de la corde. On devrait donc parler de plusieurs forces. Mais, en écrivant la seconde loi de Newton pour le système Δm :

$$\Delta T_1 - \Delta T_2 = \Delta m \cdot a$$

et en considérant une accélération non nulle, on se rend compte que si $\Delta m \cong 0$, soit si la masse de la corde est négligeable par rapport aux masses, les deux forces ΔT_1 et ΔT_2 sont égales. Alors on peut parler de la tension $T = \Delta T_1 = \Delta T_2$ dans la corde.

Le raisonnement s'appliquant à l'ensemble de la corde, on peut donc dire que si sa masse est négligeable, c'est la tension T qu'il faut déterminer.

À partir de l'accélération calculée précédemment sur la base du système complet :

$$\begin{aligned}\sum F^{ext} = m_2 \cdot g - m_1 \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a \ \Rightarrow \\ a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g\end{aligned}$$

dans l'équation du système constitué par la masse de 3 kg, on obtient :

$$\begin{aligned}m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot a \ \Rightarrow \\ T = m_2 \cdot (g - a) \\ = m_2 \cdot (g - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g) \\ = m_2 \cdot g \cdot (\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_1} - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}) \\ = m_2 \cdot g \cdot (\frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2}) \\ = 2 \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \\ = 2 \cdot \frac{2 \cdot 3}{2 + 3} \cdot g \\ = \frac{12}{5} \cdot g = 23{,}544\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

Pour vérifier cette solution, recalculons l'accélération de la seconde masse :

$$\begin{aligned}T - m_1 \cdot g = m_1 \cdot a \ \Rightarrow \\ a = \frac{T}{m_1} - g \\ = 2 \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 \cdot (m_1 + m_2)} \cdot g - g \\ = 2 \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot g - g \\ = (\frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2}) \cdot g \\ = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

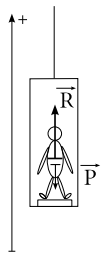
Ainsi, en calculant le poids des deux masses, soit :

$$\begin{aligned}P_1 = m_1 \cdot g = 2 \cdot 9,81 = 19{,}62\,\mathrm{N} \\ P_2 = m_2 \cdot g = 3 \cdot 9,81 = 29{,}43\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

on peut voir que les résultantes des forces qui s'exercent sur chaque masse :

$$\begin{aligned}\sum F_1 = T - P_1 = 23,544 - 19,62 = 3{,}924\,\mathrm{N} \\ \sum F_2 = P_2 - T = 29,43 - 23.544 = 5{,}886\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

Figure L.10 – *Un ascenseur*



à la valeur nécessaire à une accélération identique :

$$a_1 = \frac{\sum F_1}{m_1} = \frac{3,924}{2} = 1{,}962\,\mathrm{m/s^2} = a$$
$$a_2 = \frac{\sum F_2}{m_2} = \frac{5.886}{3} = 1{,}962\,\mathrm{m/s^2} = a$$

46 La figure L.10 présente la situation.

On choisit comme système la personne. Les forces extérieures sont alors :

— son poids $\overrightarrow{P}$ et

— la force $\overrightarrow{R}$ exercée par la balance sur la personne. Sa réaction, la force exercée par la personne sur la balance, permet à cette dernière de donner une indication du poids de la personne, indiqué malheureusement en kilogrammes (et non en newtons, comme cela devrait être le cas) par la balance.

Selon l'axe donné, on peut écrire :

$$R - P = m \cdot a \;\Rightarrow\; R = m \cdot a + m \cdot g$$

A partir de là, on peut considérer les différents cas :

1. Quand l'ascenseur prend de la vitesse, l'accélération vaut $2\,\mathrm{m/s^2}$. La réaction de la balance est alors :

   $$R = 70 \cdot 2 + 70 \cdot 9,81 = 826{,}7\,\mathrm{N}$$

   et la balance indiquerait :

   $$m = \frac{826,7}{9,81} = 84{,}3\,\mathrm{kg}$$

   La personne a un poids plus important qu'à l'arrêt et donc l'indication donnée en terme de masse par la balance pourrait laisser croire à ... de l'embonpoint.

2. Pendant la phase à vitesse constante, l'accélération vaut zéro. La réaction de la balance est alors :

   $$R = 70 \cdot 0 + 70 \cdot 9,81 = 686{,}7\,\mathrm{N}$$

   et la balance indiquerait :

   $$m = \frac{686,7}{9,81} = 70\,\mathrm{kg}$$

   La personne a le même poids qu'à l'arrêt et donc l'indication donnée en terme de masse par la balance est juste.

3. Quand l'ascenseur perd de la vitesse, l'accélération vaut $-3\,\mathrm{m/s^2}$. La réaction de la balance est alors :

   $$R = 70 \cdot (-3) + 70 \cdot 9,81 = 476{,}7\,\mathrm{N}$$

   et la balance indiquerait :

   $$m = \frac{476,7}{9,81} = 48{,}6\,\mathrm{kg}$$

   La personne a un poids moins important qu'à l'arrêt et donc l'indication donnée en terme de masse par la balance pourrait laisser croire à ... une maladie.

On voit qu'une balance indique quelque chose de relatif à l'état de mouvement de la personne. Elle n'indique donc pas une quantité de matière, c'est-à-dire une masse. Une balance devrait donc être graduée en newtons. Elle l'est en kg, car on a l'habitude de se peser à l'arrêt (bien que ... la Terre tournant ...) et à la surface de la Terre. Dans ce cas bien précis, il suffit en effet de diviser son indication (ou de reporter face à la graduation une indication de masse) par g pour obtenir la masse.

47 La loi de la gravitation universelle donne :

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1 \cdot 1}{0,5^2} = 2{,}668 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{N}$$

48 Le poids à la surface de la Terre peut être calculé de deux manières. A l'aide de la loi de la gravitation universelle et à l'aide de sa définition

$P = m \cdot g$. Il s'agit de la même force. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} m \cdot g &= G \cdot \frac{M_{Terre} \cdot m}{R_{Terre}^2} \Rightarrow \\ g &= G \cdot \frac{M_{Terre}}{R_{Terre}^2} \Rightarrow \\ M_{Terre} &= \frac{g \cdot R_{Terre}^2}{G} \\ &= \frac{9,81 \cdot (6'372 \cdot 10^3)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 5,97 \cdot 10^{24}\,\text{kg} \end{aligned}$$

49 Comme au problème 48, on a :

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

Mais ici il s'agit de la Lune. Ainsi :

$$\begin{aligned} g_{Lune} &= G \cdot \frac{M_{Lune}}{R_{Lune}^2} \\ &= 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{7,35 \cdot 10^{22}}{(1,738 \cdot 10^6)^2} \\ &= 1,62\,\text{m/s}^2 \end{aligned}$$

50 On a simplement :

$$F = k \cdot x = 800 \cdot 0,1 = 80\,\text{N}$$

51 Une masse de 100 g exerce une force

$$F = m \cdot g = 0,1 \cdot 9,81 = 0,981\,\text{N}$$

sur le ressort. On a donc :

$$F = k \cdot x \Rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{0,981}{0,12} = 8,175\,\text{N/m}$$

52 L'accélération de la voiture est (hypothèse MRUA) :

$$\begin{aligned} v^2 &= v_o^2 + 2 \cdot a \cdot d \Rightarrow \\ a &= \frac{v^2 - v_o^2}{2 \cdot d} = \frac{13,8^2}{2 \cdot 40} \\ &= 2,41\,\text{m/s}^2 \end{aligned}$$

La force exercée par la route sur les pneus est donc de :

$$F_{fr} = m \cdot a = 2000 \cdot 2,41 = 4822,5\,\text{N}$$

Or, par définition de la force de frottement sec, on a :

$$\begin{aligned} F_{fr} &= \mu \cdot R = \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow \\ \mu &= \frac{F_{fr}}{m \cdot g} = \frac{4822,5}{2000 \cdot 9,81} = 0,25 \end{aligned}$$

53 La force maximale entre les pneus et la route est donnée par :

$$F_{fr} = \mu_o \cdot R = \mu_o \cdot m \cdot g$$

On a alors :

1. Avec les roues avant uniquement, la force maximale est :

   $$F_{fr} = 0,5 \cdot 600 \cdot 9,81 = 2943\,\text{N}$$

   Et l'accélération :

   $$a = \frac{F_{fr}}{m} = \frac{2943}{1000} = 2,943\,\text{m/s}^2$$

2. Avec les roues arrière uniquement, la force maximale est :

   $$F_{fr} = 0,5 \cdot 400 \cdot 9,81 = 1962\,\text{N}$$

   Et l'accélération :

   $$a = \frac{F_{fr}}{m} = \frac{1962}{1000} = 1,962\,\text{m/s}^2$$

3. Avec les roues avant et arrière ensemble, la force maximale est :

   $$F_{fr} = 0,5 \cdot 1000 \cdot 9,81 = 4905\,\text{N}$$

   Et l'accélération :

   $$a = \frac{F_{fr}}{m} = \frac{4905}{1000} = 4,905\,\text{m/s}^2$$

54 La seconde loi de Newton permet de calculer la valeur de la force de traction :

$$\begin{aligned} F - m \cdot g &= m \cdot a \Rightarrow \\ F &= m \cdot a + m \cdot g \\ &= 50 \cdot 4 + 50 \cdot 9,81 = 690,5\,\text{N} \end{aligned}$$

La force de traction et le déplacement étant parallèles et de même sens, on a :

$$A = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d} = F \cdot d = 690,5 \cdot 100 = 69\ 050\,\text{J}$$

55 Par définition de l'énergie potentielle, on a :

$$E_{pot} = m \cdot g \cdot h = 50 \cdot 9,81 \cdot 100 = 49\ 050\,\text{J}$$

Pour le calcul de l'énergie cinétique, si on fait l'hypothèse d'un MRUA, la vitesse de la masse au bout de 100 m est :

$$\begin{aligned} v^2 &= v_o^2 + 2 \cdot a \cdot d \Rightarrow \\ v &= \sqrt{2 \cdot a \cdot d} = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 100} = 28,3\,\text{m/s} \end{aligned}$$

et l'énergie cinétique est alors :

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 28,3^2 = 20\ 022{,}25\,\text{J}$$

56 Dans chacun des cas, l'énergie cinétique se calcule par :

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

— Un bon coureur met environ 10 s pour parcourir 100 m. Sa vitesse moyenne est donc de :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{100}{10} = 10\,\text{m/s}$$

Son énergie cinétique est donc de :

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 10^2 = 4000\,\text{J}$$

— Simplement, on calcule l'énergie cinétique :

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \cdot 800 \cdot 10^2 = 40\ 000\,\text{J}$$

— Il faut mettre la masse en kg pour calculer l'énergie cinétique :

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \cdot 0,01 \cdot 800^2 = 3200\,\text{J}$$

57 Procédons par étapes :

— si on monte de 4 m, le poids et le déplacement sont opposés et le travail du poids est :

$$\begin{aligned} A &= m \cdot g \cdot d \cdot \cos(\alpha) \\ &= 3 \cdot 9,81 \cdot 4 \cdot \cos(180) = -117{,}72\,\text{J} \end{aligned}$$

— lors d'un déplacement horizontal, le poids et le déplacement sont perpendiculaires et le travail est nul (car $\cos(90°) = 0$),

— si on descend de 4 m, le poids et le déplacement sont dans le même sens et le travail du poids est :

$$\begin{aligned} A &= m \cdot g \cdot d \cdot \cos(\alpha) \\ &= 3 \cdot 9,81 \cdot 4 \cdot \cos(0) = 117{,}72\,\text{J} \end{aligned}$$

— lors d'un déplacement horizontal, le poids et le déplacement sont perpendiculaires et le travail est nul (car $\cos(90°) = 0$).

Ainsi, le travail total est la somme des travaux pour chaque déplacement :

$$A_{tot} = -117,72 + 0 + 117,72 + 0 = 0\,\text{J}$$

Le travail du poids pour un parcours fermé est donc nul. On dit d'une telle force qu'elle est « conservative ». Ce n'est que pour de telles forces qu'il existe une énergie potentielle.

58 Par définition du travail, on a :

$$\begin{aligned} A &= \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d} = F \cdot d \cdot \cos(\alpha) \\ &= 15 \cdot 20 \cdot \cos(10°) = 295{,}4\,\text{J} \end{aligned}$$

59 Pour rappel, résolvons tout d'abord le problème à l'aide de l'accélération. Nous sommes dans le cas d'un MRUA. Donc, on peut écrire :

$$\begin{aligned} &v^2 = v_o^2 + 2 \cdot a \cdot h \ \Rightarrow \\ &v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 10} = 14\,m/s = 50{,}4\,\text{km/h} \end{aligned}$$

Pour résoudre le problème à l'aide de l'énergie, il faut considérer que toute l'énergie potentielle de la personne en haut du plongeoir se transforme graduellement en énergie cinétique pendant sa chute. Si le zéro de l'énergie potentielle est choisi au niveau de l'eau, le plongeur n'a plus d'énergie potentielle lorsqu'il l'atteint. Elle s'est entièrement transformée en énergie cinétique. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} &m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \ \Rightarrow \\ &v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 10} = 14\,m/s = 50{,}4\,\text{km/h} \end{aligned}$$

et le problème est résolu.

Cependant, il faut remarquer que l'égalité de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique dérive du théorème de conservation de l'énergie mécanique. En effet, comme c'est le cas ici, en l'absence de forces non conservatives, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \Delta E_{mec} &= 0 \\ E_{mecf} - E_{meci} &= 0 \\ E_{potf} + E_{cinf} - E_{poti} - E_{cini} &= 0 \\ 0 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - m \cdot g \cdot h - 0 &= 0 \\ \Rightarrow\ \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 &= m \cdot g \cdot h \end{aligned}$$

Remarquons enfin, que le problème est ici tout aussi facile à résoudre des deux manières. Cependant, dans le premier cas, on a pu le faire car on

sait qu'une chute libre est un MRUA. Pour d'autres types de mouvements, qui ne sont pas des MRUA, pour trouver la vitesse à partir de l'accélération, il faut résoudre une intégrale. Et là, cela peut être beaucoup plus difficile qu'en utilisant l'énergie.

60 On n'utilisera pas ici la méthode newtonienne, même si le problème peut être résolu de cette manière.

Fixons le zéro de l'énergie potentielle là où l'objet décolle. Alors, son énergie potentielle est nulle et son énergie cinétique maximale. En montant, il perd graduellement de l'énergie cinétique au profit de l'énergie potentielle. Arrivé au sommet de sa trajectoire, il s'arrête brièvement et son énergie potentielle est maximale alors que son énergie cinétique est nulle. On peut donc dire que toute son énergie cinétique du départ s'est transformée en énergie potentielle au sommet et écrire :

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 = m\cdot g\cdot h \;\Rightarrow$$
$$h = \frac{v^2}{2\cdot g} = \frac{10^2}{2\cdot 9,81} = 5,1\,\mathrm{m}$$

61 Commençons par calculer la vitesse à laquelle la tuile quitte le toit. La conservation de l'énergie mécanique implique que :

$$m\cdot g\cdot \Delta h = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 \;\Rightarrow$$
$$v = \sqrt{2\cdot g\cdot \Delta h}$$
$$= \sqrt{2\cdot 9,81\cdot (30-25)} = 9,9\,\mathrm{m/s}$$

Cette vitesse est un vecteur qui fait avec l'horizontale un angle de 15°. La balistique (voir annexe 2.5.4) nous apprend qu'il faut décomposer le mouvement sur chaque axe. En particulier la vitesse initiale a les composantes suivantes :

$$v_x = v\cdot\cos(\alpha) = 9,9\cdot\cos(-15^\circ) = 9,56\,\mathrm{m/s}$$
$$v_y = v\cdot\sin(\alpha) = 9,9\cdot\sin(-15^\circ) = -2,56\,\mathrm{m/s}$$

puisque le vecteur vitesse pointe sous l'horizontale ($\alpha < 0$).

En choisissant un système d'axes dont l'origine est au sol et au pied du bord du toit, on peut alors écrire les équations de la position de la tuile au cours du temps :

$$x(t) = v_x\cdot t = 9,56\cdot t$$
$$y(t) = -\frac{1}{2}\cdot 9,81\cdot t^2 + v_y\cdot t + y_o$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot 9,81\cdot t^2 - 2,56\cdot t + 25$$

On cherche alors la position horizontale de la tuile au moment où elle arrive au sol, soit $x(t_{sol})$. Il faut donc calculer t_{sol}. Or, à ce moment là, $y(t_{sol}) = 0$. La seconde équation nous donne donc :

$$0 = -\frac{1}{2}\cdot 9,81\cdot t_{sol}^2 - 2,56\cdot t_{sol} + 25$$
$$\Rightarrow\; -4,905\cdot t_{sol}^2 - 2,56\cdot t_{sol} + 25 = 0$$

C'est une équation du second degré à une inconnue t_{sol}. Sa solution est :

$$t_{sol} = \frac{2,56 \pm \sqrt{2,56^2 + 4\cdot 4,905\cdot 25}}{2\cdot(-4,905)}$$
$$= \frac{2,56\pm 22,3}{-9,81} = \begin{cases} -2{,}53\,\mathrm{s} \\ 2\,\mathrm{s}\end{cases}$$

Évidemment, le temps correct est celui qui est positif.

Ainsi, $t_{sol} = 2\,\mathrm{s}$. La distance au pied du toit à laquelle la tuile arrivera est donc :

$$x(t_{sol}) = v_x\cdot t_{sol} = 9,56\cdot 2 = 19{,}12\,\mathrm{m}$$

62 Simplement, on a :

$$\Delta E_{cin} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_f^2 - \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_i^2$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2000\cdot((\frac{10}{3,6})^2 - (\frac{5}{3,6}^{\,2})) = 5787\,\mathrm{J}$$

63 La puissance de chute est :

$$P = \eta\cdot Q\cdot g\cdot h =$$
$$= 0,4\cdot 30\cdot 10^{-3}\cdot 9,81\cdot 22 = 2{,}59\,\mathrm{kW}$$

La chute à donc une puissance de 2590 W. Son frigo et sa machine à laver ont une puissance totale de 2,2 kW. Reste donc $2590 - 2200 = 390$ W pour les ampoules. Or, $390/40 = 9,75$. Robinson pourra donc utiliser 9 ampoules.

64 Le débit de la prise d'eau est de :

$$Q = 0,05 \cdot 30 = 1,5\, l/s = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3/s}$$

La puissance de chute est donc de :

$$\begin{aligned} P &= \eta \cdot Q \cdot g \cdot h = \\ &= 0,4 \cdot 1,5 \cdot 9,81 \cdot 22 = 129{,}5\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

Or, faire monter une masse de 60 kg d'une hauteur de deux étages, soit 4 m, demande une énergie de :

$$E = m \cdot g \cdot h = 60 \cdot 9,81 \cdot 4 = 2354{,}4\,\mathrm{J}$$

Compte tenu des frottements, l'énergie totale nécessaire est de $2 \cdot 2'354,4 = 4708{,}8$ J. Soit, pour une montée en 2 min, une puissance de :

$$P = \frac{E}{t} = \frac{4'708,8}{2 \cdot 60} \simeq 40\,\mathrm{W}$$

Ainsi, si 40 W sont nécessaires, Robinson n'utilise certainement pas les quelques 130 W fournis par la chute d'eau. L'ascenseur est donc réalisable.

65 Le nombre de ménages est de $30'000/2,5 = 12'000$. Il faut donc fournir une énergie de :

$$E = 12'000 \cdot 3'000 = 36\ 000\ 000\,\mathrm{kW\,h} = 36\,\mathrm{GW\,h}$$

Sur une année, cette énergie représente une puissance moyenne de :

$$P = \frac{E}{t} = \frac{36 \cdot 10^9}{365 \cdot 24} = 4110\,\mathrm{W}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P &= \eta \cdot Q \cdot g \cdot h \ \Rightarrow \\ Q &= \frac{P}{\eta \cdot g \cdot h} \\ &= \frac{4'110}{0,9 \cdot 9,81 \cdot 74} = 6{,}3\,\mathrm{m^3/s} \end{aligned}$$

Il faut donc choisir une turbine Francis.

66 La puissance du vent est donnée par la relation 7.10 :

$$P_{vent} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot v^3$$

Soit avec une surface $S = \pi \cdot R^2$, une vitesse en unités SI $v = 6$ m/s et les valeurs données :

$$\begin{aligned} P_{vent} &= \frac{1}{2} \cdot 1,293 \cdot \pi \cdot 22^2 \cdot 6^3 \\ &= 212\ 333\,\mathrm{W} = 212{,}333\,\mathrm{kW} \end{aligned}$$

67 La vitesse linéaire en bout de pale vaut donc :

$$v = \frac{277,2}{3,6} = 77\,\mathrm{m/s}$$

Or, un tour représente une distance en bout de pale : $d = 2 \cdot \pi \cdot 30 = 188{,}5$ m. La vitesse de rotation est donc de :

$$v = \frac{77}{188,5} = 0{,}41\,\mathrm{tr/s}$$

La puissance du vent vaut, selon l'équation 7.10 :

$$\begin{aligned} P_{vent} &= \frac{1}{2} \cdot 1,293 \cdot \pi \cdot 30^2 \cdot (\frac{32,4}{3,6})^3 \\ &= 1\ 332\ 565\,\mathrm{W} = 1332{,}6\,\mathrm{kW} \end{aligned}$$

Comme l'éolienne tourne à $\eta = 90\%$ de la limite de Betz, on a, selon l'équation 7.12 :

$$\begin{aligned} \Delta P &= \eta \cdot \frac{16}{27} \cdot P_{vent} \\ &= 0,9 \cdot 0,593 \cdot 1'332'565 = \\ &= 710\ 701\,\mathrm{W} = 710\,\mathrm{kW} \end{aligned}$$

68 On a, selon l'équation 7.12, que :

$$\begin{aligned} \Delta P &= \eta \cdot \frac{16}{27} \cdot P_{vent} \ \Rightarrow \\ P_{vent} &= \frac{27 \cdot \Delta P}{16 \cdot \eta} \\ &= \frac{27 \cdot 40}{16 \cdot 0,4} = 168{,}75\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

Il s'agit de la puissance du vent nécessaire pour alimenter l'ampoule. On a donc, selon l'équation 7.10 :

$$\begin{aligned} P_{vent} &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot v^3 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot v^3 \ \Rightarrow \\ R &= \sqrt{\frac{2 \cdot P_{vent}}{\rho \cdot \pi \cdot v^3}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 168,75}{1,293 \cdot \pi \cdot 4^3}} \\ &= 1{,}14\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Il faut donc utiliser une petite éolienne de 1,14 m de rayon.

69 L'équation 10.3, page 135, permet de calculer la puissance ΔP nécessaire pour chauffer une masse de 100 kg d'eau :

$$\Delta P = \frac{E}{t} = \frac{m \cdot c_{eau} \cdot \Delta\theta}{t} = \frac{100 \cdot 4'180 \cdot 20}{4 \cdot 3600} = 581\,\text{W}$$

L'équation 7.14 nous donne alors la surface cherchée S :

$$\Delta P = S \cdot (B \cdot P - K \cdot \Delta\theta) \Rightarrow S = \frac{\Delta P}{B \cdot P - K \cdot \Delta\theta} = \frac{581}{0,8 \cdot 120 - 3 \cdot 20} = 16,2\,\text{m}^2$$

70 On calcule tout d'abord la puissance fournie par les capteurs :

$$\Delta P = S \cdot (B \cdot P - K \cdot \Delta\theta) \Rightarrow = 5 \cdot (0,7 \cdot 150 - 2 \cdot 15) = 375\,\text{W}$$

Cela signifie que les capteurs produisent une énergie $E = 375\,\text{J/s}$. Chaque seconde, il faut donc évacuer cette énergie. La masse d'eau nécessaire pour cela est donnée par l'équation 10.3, page 135 :

$$E = m \cdot c_{eau} \cdot \Delta\theta \Rightarrow m = \frac{E}{c_{eau} \cdot \Delta\theta} = \frac{375}{4'180 \cdot 15} = 6\,\text{g}$$

C'est une masse qui correspond à un volume de :

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho} = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{1} = 6\,\text{ml}$$

En effet, la masse volumique de l'eau est de 1 kg/l. Le débit est donc très faible et vaut $D = 6\,\text{ml/s} = 21,6\,\text{l/h}$.

71 L'énergie annuelle produite par les $8\,\text{m}^2$ de cellules est, compte tenu d'un rendement d'environ 15%, c'est-à-dire $20\,\text{W/m}^2$:

$$E = 8 \cdot 20 \cdot 24 \cdot 365 = 1401,6\,\text{kW h}$$

La couverture solaire ne suffit donc pas. Il manque $2'500 - 1'401,6 = 1098,4\,\text{kW h}$. Cela représente une puissance de :

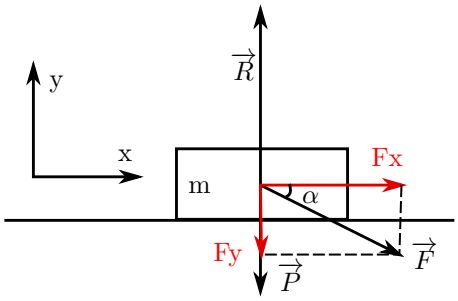
$$P = \frac{E}{t} = \frac{1'098,4}{24 \cdot 365} = 125,4\,\text{kW}$$

L.3 Solutions OS

1 La masse m constitue évidemment le système. On choisit un système d'axes vertical et horizontal dirigé vers le haut et dans le sens de l'accélération.

Les forces extérieures exercées sur la masse sont au nombre de trois : son poids P, la réaction du plan R et la force F. La figure L.11 présente la

Figure L.11 – *Une force inclinée*



situation. On peut y voir les trois forces extérieures et, en rouge , la décomposition de la force F en ses composantes sur les axes (remarquez qu'on a représenté les composantes par des vecteurs, ce qui est courant en physique lors de la décomposition de forces parce qu'on peut alors comprendre celle-ci comme un remplacement de la force F par deux forces qui en forment la somme).

L'équation de Newton sous forme vectorielle donne alors les équations du mouvement en composantes :

$$\sum \vec{F}^{ext} = \vec{R} + \vec{P} + \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \begin{aligned} F_x &= m \cdot a \\ R - P - F_y &= 0 \end{aligned}$$

car l'accélération selon l'axe y est nulle puisque la masse ne se déplace par sur cet axe.

En considérant le triangle formé par la force F, sa composante sur l'axe x et l'angle α, on peut écrire :

$$F_x = F \cdot \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad F_y = F \cdot \sin(\alpha)$$

et à l'aide de la définition du poids ($P = m \cdot g$),

préciser les équations du mouvement :

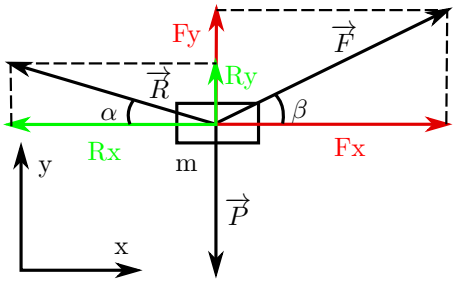
$$F \cdot \cos(\alpha) = m \cdot a$$
$$R - m \cdot g - F \cdot \sin(\alpha) = 0$$

Cela permet finalement les résultats :

$$\begin{aligned} a &= \frac{F \cdot \cos(\alpha)}{m} \\ &= \frac{5 \cdot \cos(30)}{15} = 0{,}29\,\mathrm{m/s^2} \\ R &= m \cdot g + F \cdot \sin(\alpha) \\ &= 15 \cdot 9.81 + 5 \cdot \sin(30) = 149{,}65\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

2 Commençons par trouver les forces exercées par les câbles sur la lampe. Considérons donc la lampe comme système. Pour des câbles souples la force est exercée le long du câble. La situation est donc celle de la figure L.12. Où R et F sont les tension dans

Figure L.12 – *Une lampe suspendue*



les câbles. Dans le système d'axes présenté, on peut écrire l'équation du mouvement :

$$\sum \vec{F}^{ext} = \vec{R} + \vec{P} + \vec{F} = 0 \;\Rightarrow$$

$$F_x - R_x = 0$$
$$F_y + R_y - P = 0$$

car le système est statique et l'accélération nulle.

En considérant que le poids $P = m \cdot g$ et les triangles d'angles au sommet α et β, grâce à la trigonométrie, on peut écrire :

$$F_x = F \cdot \cos(\beta) \;\; \textbf{et} \;\; R_x = R \cdot \cos(\alpha)$$

et préciser les équations du mouvement :

$$F \cdot \cos(\beta) - R \cdot \cos(\alpha) = 0$$
$$F \cdot \sin(\beta) + R \cdot \sin(\alpha) - m \cdot g = 0$$

Il s'agit de deux équations à deux inconnues F et R. Pour les résoudre, on tire F de la première et on la remplace dans la seconde :

$$\begin{aligned} & F = R \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \;\Rightarrow \\ & R \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \cdot \sin(\beta) + R \cdot \sin(\alpha) - m \cdot g = 0 \;\Rightarrow \\ & R \cdot (\cos(\alpha) \cdot \tan(\beta) + \sin(\alpha)) = m \cdot g \;\Rightarrow \\ & R = \frac{m \cdot g}{\cos(\alpha) \cdot \tan(\beta) + \sin(\alpha)} \\ & \quad = \frac{7 \cdot 9{,}81}{\cos(20) \cdot \tan(30) + \sin(20)} = 77{,}63\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

et donc pour F :

$$\begin{aligned} F &= R \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \\ &= 77{,}63 \cdot \frac{\cos(20)}{\cos(30)} = 84{,}24\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

3 On commence par choisir le système. Pour éviter de devoir calculer la tension dans la corde, on le choisit comme constitué de la corde et des deux masses M et m.

Les forces extérieures sont alors au nombre de trois. Le plan horizontal exerce sur la masse M une force de soutient verticale égale et opposée à son poids (mais qui ne sont pas l'action et la réaction l'une de l'autre), puisque la masse se déplace horizontalement. Ces deux forces s'annulent donc. Reste le poids de la masse m, seule force extérieure à agir pour accélérer le système.

On peut donc écrire, selon la seconde loi de Newton :

$$\sum F^{ext} = m \cdot g = (M + m) \cdot a$$

où M+m est la masse du système. Ainsi, finalement, on peut calculer la valeur de l'accélération :

$$\begin{aligned} & m \cdot g = (M + m) \cdot a \;\Rightarrow \\ & a = \frac{m}{M + m} \cdot g = \frac{2}{5} \cdot 9{,}81 = 3{,}924\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

À partir de l'accélération, on peut ensuite calculer la vitesse au bout d'un mètre, grâce à l'équation du MRUA :

$$\begin{aligned} & v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot d \;\Rightarrow \\ & v^2 = 0 + 2 \cdot 3{,}924 \cdot 1 \;\Rightarrow \\ & v = \sqrt{2 \cdot 3{,}924} = 2{,}8\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

4 Deux forces agissent ici : la réaction du plan, qui lui est normale (c'est-à-dire perpendiculaire), et le poids de la masse. Comme la réaction du plan n'a aucune composante parallèlement au plan, elle ne peut être responsable de l'accélération de la masse le long de celui-ci.

Il faut donc trouver la composante du poids qui est parallèle au plan incliné. L'angle entre le poids et un plan horizontal est de 90°. Quand le plan est incliné, cet angle diminue de la valeur de l'inclinaison. L'angle β entre le plan incliné et le poids et donc $\beta = 90 - \alpha$.

Comme la projection du poids selon l'angle β correspond à sa composante parallèle au plan, dans le triangle rectangle composé du poids comme hypoténuse et de ses composantes parallèle et perpendiculaire au plan, la composante parallèle au plan correspond au côté adjacent. Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned} P_{//} &= P \cdot \cos(\beta) = P \cdot \cos(90 - \alpha) \\ &= P \cdot \sin(\alpha) \end{aligned}$$

La seconde loi de Newton s'écrit donc le long du plan incliné :

$$\begin{aligned} \sum F^{ext} = P \cdot \sin(\alpha) = m \cdot a \ &\Rightarrow \\ m \cdot g \cdot \sin(\alpha) = m \cdot a \ &\Rightarrow \\ a = g \cdot \sin(\alpha) \ &\Rightarrow \\ a = 9,81 \cdot \sin(20) = 3{,}36\,\mathrm{m/s^2} & \end{aligned}$$

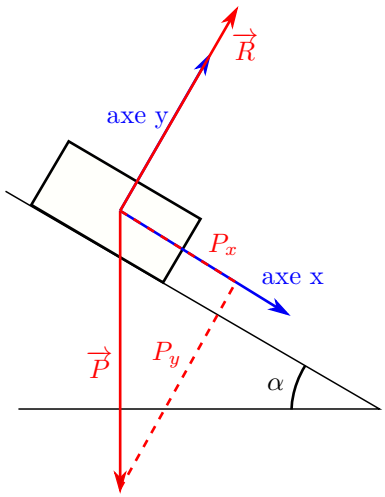
Avec une vitesse initiale nulle, pour un MRUA d'accélération calculée ci-dessus, la vitesse au bout d'un temps t=2 s s'obtient par :

$$v = a \cdot t + v_0 = 3,36 \cdot 2 = 9{,}72\,\mathrm{m/s}$$

Une autre manière de résoudre le problème est de procéder avec méthode. Le système qu'on doit choisir est bien évidemment la masse m, puisque c'est de celle-ci qu'on cherche l'accélération pour en trouver la vitesse au bout de 2 s.

La figure L.13 présente ensuite le dessin des forces extérieures et le choix du système d'axes. Remarquez que ce dernier l'a été selon l'inclinaison du plan. Il aurait pu ne pas en être ainsi, mais ce choix simplifie les calculs, car la masse étant contrainte à se déplacer le long du plan, son accélération perpendiculairement est nulle. Les équations de la seconde loi de Newton, obtenues par projection des

Figure L.13 – *Le plan incliné*



forces extérieures et de l'accélération selon les axes, peuvent alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \sum F_x^{ext} &= P_x = m \cdot a_x && \text{sur l'axe x} \\ \sum F_y^{ext} &= R - P_y = m \cdot a_y = 0 && \text{sur l'axe y} \end{aligned}$$

car l'accélération perpendiculairement au plan est nulle, comme déjà mentionné.

Si on considère l'angle α, en s'imaginant le plan incliné horizontal, on comprends qu'il se reporte entre le vecteur poids $\overleftarrow{P}$ et sa composante selon y P_y.

Avec le triangle rectangle formé par le poids et ses composantes et un peu de trigonométrie, on peut en déduire :

$$\begin{aligned} P_x &= P \cdot \sin(\alpha) \\ P_y &= P \cdot \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Comme par ailleurs on sait que $P = m \cdot g$, on peut réécrire les équations de Newton sur les axes comme :

$$\begin{aligned} \sum F_x^{ext} &= m \cdot g \cdot \sin(\alpha) = m \cdot a_x \\ \sum F_y^{ext} &= R - m \cdot g \cdot \cos(\alpha) = m \cdot a_y = 0 \end{aligned}$$

La première de ces équations permet de trouver l'accélération du bloc selon le plan incliné :

$$\begin{aligned} a = a_x &= g \cdot \sin(\alpha) \\ &= 9,81 \cdot \sin(20) = 3{,}36\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

Mais une information supplémentaire nous est donnée par la seconde équation, c'est la valeur de la réaction R au plan :

$$\begin{aligned} R &= m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \\ &= 3 \cdot 9,81 \cdot \cos(20) = 27{,}67\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Ensuite, le problème se résout de la même manière que précédemment.

5 Le problème peut paraître complexe du fait de la présence de deux objets distincts se déplaçant selon deux axes différents. Pourtant, le fait que la corde soit inextensible fait de l'ensemble des deux masse et de la corde un système se déplaçant avec la même accélération. De plus, pour autant qu'on considère correctement l'action des forces sur chaque masse, on peut s'imaginer ce système se déplaçant d'un bloc horizontalement.

Comme on ne connaît pas la tension dans la corde (on ne peut s'imaginer à priori qu'elle correspond au poids de la masse m), le choix du système comprenant les deux masses et la corde s'impose, car ainsi la tension dans la corde, en tant que force intérieure, n'apparaîtra pas dans les équations de Newton.

Comme déjà dit, on peut considérer le système d'un seul tenant. On va donc imaginer un axe suivant la corde et orienté vers le bas du plan incliné, car la masse M étant plus grande que m, il est évident que le mouvement se fera dans ce sens. Ainsi, le signe de l'accélération sera positif.

Reste à considérer les forces extérieures. Elles sont au nombre de quatre :

1. le poids P de la masse M,
2. la réaction R du plan incliné,
3. celui p de la masse et
4. la force exercée sur la corde par la poulie.

La dernière est toujours perpendiculaire à la corde et ne participe donc pas au mouvement des masses. La troisième est toujours parallèle à la corde. La seconde est toujours perpendiculaire au plan incliné et ne participe elle aussi pas au mouvement. La première à une composante perpendiculaire au plan incliné et ne participe pas au mouvement, mais aussi une composante parallèle à ce plan et doit être considérée. Avec l'angle α défini, on peut reprendre le raisonnement évoqué au problème 4, évoquant le triangle rectangle formé par le poids de la masse M et se composantes et affirmant que l'angle α est celui entre le poids et sa composante perpendiculaire au plan, pour écrire que la composante parallèle au plan vaut :

$$P_{//} = M \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

À partir de là, on peut écrire l'équation du mouvement du système (des deux masse et de la corde) :

$$\sum F^{ext} = M \cdot g \cdot \sin(\alpha) - m \cdot g = (M + m) \cdot a$$

et calculer l'accélération :

$$\begin{aligned} a &= \frac{M \cdot g \cdot \sin(\alpha) - m \cdot g}{M + m} \\ &= \frac{5 \cdot 9,81 \cdot \sin(30) - 3 \cdot 9,81}{5 + 3} \\ &= -0{,}6\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

Le signe négatif signifie que la masse M monte vers le haut du plan incliné.

Pour calculer la tension dans la corde, il est indispensable de changer de système pour la faire apparaître en tant que force extérieure dans l'équation de Newton.

Trois éléments peuvent prétendre servir de système.

La corde en premier lieu. Si on la considère seule, à l'une de ses extrémités la masse m exerce sur elle une force T_m et à l'autre la masse M exerce une tension à priori différente T_M. La force exercée par la poulie reste perpendiculaire et ne contribue pas au mouvement. On peut donc écrire :

$$T_M - T_m = \mu \cdot a$$

où μ est la masse de la corde. Or, si cette masse est nulle, indépendamment de l'accélération, le deux tensions sont égales. Cela est évidemment valable pour tous les éléments de la corde dont on dira donc qu'elle exerce une force T à déterminer.

Le système corde ne permet donc pas de la trouver.

Restent les deux masses. Pour la masse M interviendra dans l'équation du mouvement un sinus qu'on va éviter en considérant m.

Sur m, avec un axe pointant toujours vers le haut, l'équation de Newton devient très simple :

$$\begin{aligned}\sum Fext = T - m \cdot g = m \cdot a \ \Rightarrow \\ T = m \cdot (a + g) = 3 \cdot (-0,6 + 9,81) \\ = 27{,}6\,\text{N}\end{aligned}$$

Pour vérifier ce résultat, choisissons l'autre masse (M) pour système. On écrira alors :

$$\begin{aligned}\sum F^{ext} = -T + M \cdot g \cdot \sin(\alpha) = M \cdot a \ \Rightarrow \\ T = M \cdot g \cdot \sin(\alpha) - M \cdot a \\ = 5 \cdot 9,81 \cdot \sin(30) - 5 \cdot (-0,6) \\ = 27{,}6\,\text{N}\end{aligned}$$

6 Pour calculer la vitesse de chute, il suffit de trouver la vitesse d'un objet en chute libre au bout de 2 m de déplacement. Avec les équations du MRUA, on a :

$$\begin{aligned}v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 2} \\ = 6{,}26\,\text{m/s}\end{aligned}$$

Ensuite, si on considère que la descente en parachute se fait à vitesse constante, c'est-à-dire avec une accélération nulle, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\sum F^{ext} = -T + m \cdot g = m \cdot a = 0 \ \Rightarrow \\ T = m \cdot g = 70 \cdot 9,81 = 686{,}7\,\text{N}\end{aligned}$$

En d'autre termes, le parachute n'a à supporter que le poids du parachutiste.

7 1. Avec pour système la nacelle, la corde et la masse, les deux seules forces extérieures sont le poids P et la force exercée par le ballon F. Tout se déroulant sur un axe vertical, qu'on choisira vers le haut, on peut écrire la seconde loi sur cet axe :

$$\sum F^{ext} = F - (M+m) \cdot g = (M+m) \cdot a = 0$$

puisque l'accélération est nulle. Ainsi, la force F exercée par le ballon sur la nacelle est simplement égale au poids du système :

$$F = (M + m) \cdot g = 180 \cdot 9,81 = 1765{,}8\,\text{N}$$

Le même raisonnement vaut pour la masse suspendue dont l'accélération est nulle. Ainsi la tension T dans la corde vaut exactement le poids de la masse pendante :

$$T = m \cdot g = 80 \cdot 9,81 = 784{,}8\,\text{N}$$

2. À vitesse constante, la force permettant au ballon de s'élever est donc égale au poids de ce qu'il soulève. La force d'ascension vaut donc $F = 1765{,}8\,\text{N}$.
Si on lâche 20 kg de lest, la masse de la nacelle devient égale à 80 kg. La seconde loi de Newton permet alors de calculer l'accélération :

$$\begin{aligned}\sum F^{ext} = F - (M+m) \cdot g = (M+m) \cdot a \ \Rightarrow \\ a = \frac{F}{M+m} - g = \frac{1765,8}{80+80} - 9,81 \\ = 1{,}23\,\text{m/s}^2\end{aligned}$$

Évidemment, la force exercée par le ballon sur la nacelle vaut 1765,8 N.
La force exercée par la corde sur la masse se calcule finalement par application de la seconde loi au système constitué uniquement de m :

$$\begin{aligned}\sum F^{ext} = T - m \cdot g = m \cdot a \ \Rightarrow \\ T = m \cdot a + m \cdot g = 80 \cdot (1,23 + 9,81) \\ = 882{,}9\,\text{N}\end{aligned}$$

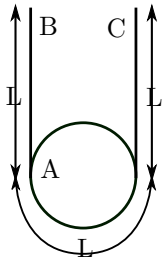
8 On verra ci-dessous que l'utilisation de la seconde loi de Newton permet d'obtenir une relation entre l'accélération de chaque masse, constituant une équation à deux inconnues. Pour déterminer la valeur des deux accélérations, il est donc nécessaire de trouver une seconde équation entre ces deux équations.

Imaginons une poulie suspendue à une corde qui dépasse de celle-ci des deux côtés d'une longueur L, comme présenté sur la figure L.14. La demi-circonférence de la poulie vaut aussi L. On tire sur la corde à gauche pour la faire monter d'une hauteur L.

La question est : *de quelle hauteur monte la poulie ?*

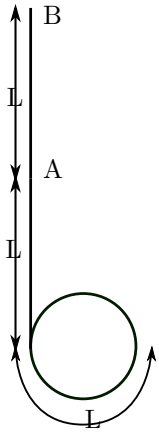
Pour le déterminer, il faut considérer qu'en tirant sur la corde pour la faire monter d'une hauteur L, on amène le point A qui est à l'origine au contact de la poulie à la place du point B du haut de la corde

Figure L.14 – *Corde et poulie*



(voir figure L.14). Si la poulie restait à sa place, on aurait la situation de la figure L.15). Mais, elle est en réalité libre de monter. Ce qui reste fixe est le point C de la figure L.14. On a donc a répartir

Figure L.15 – *Corde tirée et poulie*

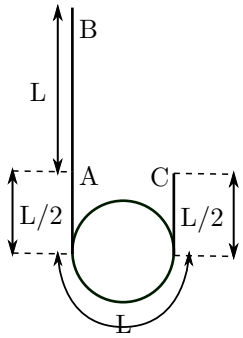


une longueur 2L de corde entre le point A de la figure L.15 et le point C de la figure L.14. Comme la demi-circonférence de la poulie vaut L, il reste une longueur L à répartir des deux côtés de la poulie, soit L/2 de chaque côté, comme le montre la figure L.16. Ainsi, quand on tire la corde d'une longueur L, la poulie monte d'une longueur L/2.

Pour revenir au système des deux poulies du problème, la remarque précédente se traduit par le fait que quand la masse m descend d'une longueur L, la masse M monte d'une longueur L/2.

L'accélération étant une distance divisée par un temps au carré, on comprends facilement que cela signifie que l'accélération de la masse m vaut simplement le double de celle de la masse M, soit :

Figure L.16 – *Corde tirée et poulie montée*



$$a_m = 2 \cdot a_M$$

Cette équation constitue une première relation entre les deux inconnues que sont les accélérations de chaque masse.

Les masses étant égales, on pourrait aussi croire que le système est en équilibre. Ce n'est pas le cas. Pour le comprendre, considérons la poulie qui n'est pas accrochée au plafond.

À l'instar d'une poulie suspendue au plafond à laquelle on accroche deux masses identiques pendantes par l'intermédiaire d'une corde, la force totale qu'exerce sur elle le plafond vaut évidemment le poids total des deux masses, puisque la poulie ne bouge pas. Or, pour que chaque masse individuellement ne bouge pas, il faut que la corde qui passe dans la poulie exerce sur chacune d'elle une force égale à son poids. De chaque côté de la poulie, la corde exerce donc une même force et la poulie est tirée vers le bas par l'ensemble de ces deux forces.

Ainsi, sur la poulie qui n'est pas accrochée au plafond, la force totale exercée vers le haut vaut deux fois la tension dans la corde. Vers le bas, seule le poids de la masse M qui lui est suspendue est présent.

De l'autre côté, la masse m retenue par la corde qui passe sur la poulie suspendue au plafond est soumise à un poids identique vers le bas et à une seule force vers le haut exercée par la corde. Comme la masse de la corde est nulle, la tension dans la corde est la même partout.

Finalement, la masse M est tirée vers le haut par deux fois la tension dans la corde et la masse m est retenue par une fois la tension dans la corde. Clairement donc, la première monte et la seconde descend.

Le choix du système d'axe est donc clair : vers le haut pour la masse M qui monte et vers le bas pour m qui descend, le mouvement se faisant dans cette direction avec une accélération a identique pour les deux masses.

On peut alors écrire les équations du mouvement de chaque masse ainsi :

$$\begin{aligned} m \cdot g - T &= m \cdot a_m \\ 2 \cdot T - M \cdot g &= M \cdot a_M \end{aligned}$$

En multipliant par deux la première équation, on peut les additionner pour en tirer l'accélération.

$$\begin{array}{rr} & 2 \cdot m \cdot g - 2 \cdot T = 2 \cdot m \cdot a_m \\ + & 2 \cdot T - M \cdot g = M \cdot a_M \\ \hline & 2 \cdot m \cdot g - M \cdot g = 2 \cdot m \cdot a_m + M \cdot a_M \end{array}$$

Cela constitue la seconde relation entre les deux inconnues que sont les accélérations de chaque masse.

Avec la première relation établie ci-dessus entre les accélérations des deux masses ($a_m = 2 \cdot a_M$), on a alors :

$$\begin{aligned} 2 \cdot m \cdot g - M \cdot g &= 2 \cdot m \cdot a_m + M \cdot a_M \;\Rightarrow \\ 2 \cdot m \cdot g - M \cdot g &= 2 \cdot m \cdot 2 \cdot a_M + M \cdot a_M \;\Rightarrow \\ 2 \cdot m \cdot g - M \cdot g &= 4 \cdot m \cdot a_M + M \cdot a_M \;\Rightarrow \\ a_M &= \frac{2 \cdot m - M}{4 \cdot m + M} \cdot g \end{aligned}$$

Dans le cas où les deux masse sont identiques (M=m), on a alors :

$$a_M = \frac{2 \cdot m - m}{4 \cdot m + m} \cdot g = \frac{m}{5 \cdot m} \cdot g = \frac{1}{5} \cdot g$$

et pour l'accélération de m :

$$a_m = 2 \cdot a_M = \frac{2}{5} \cdot g$$

9 Dans ce problème, on n'utilise pas le système d'axes de la figure L.13 qui est parallèle et normal au plan incliné, mais un système d'axes horizontal et vertical. Les équations du mouvement selon ce système s'écrivent avec des notations évidentes :

$$\sum \overrightarrow{F}^{ext} = \overrightarrow{R} + \overrightarrow{P} = m \cdot \overrightarrow{a} \;\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} R_x &= m \cdot a_x \\ R_y - P &= m \cdot a_y \end{aligned}$$

En considérant que l'angle α du plan incliné se retrouve entre la réaction R et la verticale, on peut écrire :

$$R_x = R \cdot \sin(\alpha) \;\text{ et }\; R_y = R \cdot \cos(\alpha)$$

et finalement en tirer les accélérations cherchées :

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{R \cdot \sin(\alpha)}{m} \\ a_y &= \frac{R \cdot \cos(\alpha) - m \cdot g}{m} \end{aligned}$$

Visiblement, on a deux équations pour trois inconnues, les deux accélérations et la réaction du plan.

Pour le calcul de cette dernière, il est donc nécessaire de disposer de l'équation supplémentaire donnée par la contrainte imposée à la masse de rester sur le plan incliné, soit la relation spécifiant que la réaction R est égale à la composante perpendiculaire au plan incliné du poids :

$$R = P \cdot \cos(\alpha) = m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$

Ainsi, en remplaçant dans les équations du mouvement, on a :

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{m} \\ a_y &= \frac{m \cdot g \cdot \cos^2(\alpha) - m \cdot g}{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_x &= g \cdot \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ a_y &= g \cdot (\cos^2(\alpha) - 1) = -g \cdot \sin^2(\alpha) \end{aligned}$$

Pour vérifier que ces relations sont correctes, on peut calculer la norme du vecteur accélération qui devrait selon le problème 4 valoir $a = g \sin(\alpha)$. Le

calcul est le suivant :

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\ &= \sqrt{(g \cdot \cos(\alpha)\sin(\alpha))^2 + (-g \cdot \sin^2(\alpha)^2} \\ &= \sqrt{g^2 \cdot \cos^2(\alpha)\sin^2(\alpha) + g^2 \cdot \sin^4(\alpha)} \\ &= \sqrt{g^2 \cdot \sin^2(\alpha) \cdot (\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha))} \\ &= \sqrt{g^2 \cdot \sin^2(\alpha)} \\ &= g \cdot \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

10 Rappelons tout d'abord que l'exercice 5.4 a permis de calculer l'accélération d'un système de deux masses, l'une sur un plan horizontal, la masse M', et l'autre pendant dans le vide, la masse m, accrochée à la première par une ficelle sans masse. Avec un système constitué des deux masses, on a pu montrer que :

$$m \cdot g = (M' + m) \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m}{M' + m} \cdot g$$

C'est à partir de là que l'on peut résoudre le présent problème.

La solution est toute simple. À un instant donné on groupe toute la masse qui glisse sur le plan pour en faire la masse M et toute la masse pendante pour en faire la masse m. Pour cela, définissons une masse par unité de longueur de corde :

$$\rho = \frac{M}{L}$$

Ainsi on peut écrire :

$$\begin{aligned} M &= (L - y) \cdot \rho = (L - y) \cdot \frac{M}{L} \\ m &= y \cdot \rho = y \cdot \frac{M}{L} \end{aligned}$$

Ainsi, on peut simplement écrire l'équation de l'accélération :

$$\begin{aligned} a &= \frac{m}{M + m} \cdot g = \frac{y \cdot M/L}{(L - y) \cdot M/L + y \cdot M/L} \cdot g \\ &= \frac{y}{(L - y) + y} \cdot g = \frac{y}{L} \cdot g \end{aligned}$$

11 On commence par calculer l'accélération à la surface de Sedna grâce à la loi de la gravitation universelle :

$$\begin{aligned} g_{Sedna} &= G \cdot \frac{M}{R^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10^{21}}{(995 \cdot 10^3/2)^2} \\ &= 0{,}27\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

On peut alors calculer les deux poids :

$$\begin{aligned} P_{Terre} &= m \cdot g = 13 \cdot 9,81 = 127{,}5\,\mathrm{N} \\ P_{Sedna} &= m \cdot g = 13 \cdot 0,27 = 3{,}5\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Le rapport est alors de 127,5/3,5=36,4.

12 La seconde loi de Newton pour la trajectoire circulaire d'un corps m soumis à la gravitation autour d'une masse centrale M s'écrit :

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot a = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Sur une trajectoire circulaire la vitesse vaut :

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$$

où T est la période de rotation de la masse m. Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned} G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} &= m \cdot \frac{(2 \cdot \pi r)^2}{T^2 \cdot r} \\ G \cdot \frac{M}{r^2} &= \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \Rightarrow \\ M &= \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} \end{aligned}$$

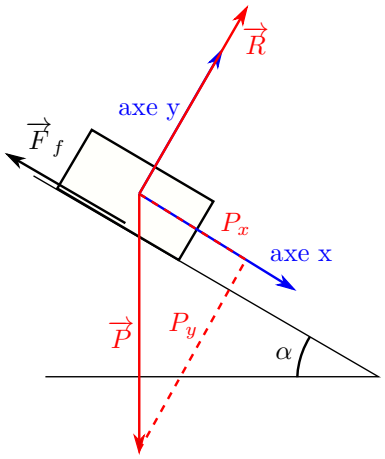
Avec les données suivantes :

$$\begin{aligned} r &= 5,91 \cdot 11,19 \cdot 6,371 \cdot 10^6 = 421{,}33 \cdot 10^6\,\mathrm{m} \\ T &= 1,769 \cdot 24 \cdot 3'600 = 1{,}53 \cdot 10^5\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

on peut alors calculer la masse :

$$\begin{aligned} M &= \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} \\ &= \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (421,33 \cdot 10^6)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (1,53 \cdot 10^5)^2} \\ &= 1{,}89 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Figure L.17 – *Frottements sur plan incliné*



13 La situation est celle de la figure L.17. Dans le système d'axe de cette figure, les équations du mouvement sont :

$$\begin{aligned} P_x - F_f &= m \cdot a \\ R - P_y &= 0 \end{aligned}$$

Si le bloc est statique, l'accélération est nulle, la force de frottement vaut :

$$F_f = \mu_0 \cdot R$$

et les composantes du poids sont :

$$P_x = P \cdot \sin(\alpha) \quad \textbf{et} \quad P_y = P \cdot \cos(\alpha)$$

Ainsi, les équations du mouvement deviennent :

$$\begin{aligned} P \cdot \sin(\alpha) - \mu_0 \cdot R &= 0 \\ R - P \cdot \cos(\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

En remplaçant la réaction R de la seconde équation dans la première, on obtient :

$$\begin{aligned} P \cdot \sin(\alpha) - \mu_0 \cdot P \cdot \cos(\alpha) = 0 \quad &\Rightarrow \\ P \cdot \sin(\alpha) = \mu_0 \cdot P \cdot \cos(\alpha) \quad &\Rightarrow \\ \mu_0 = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha) = \tan(32) &= 0{,}62 \end{aligned}$$

Si le bloc glisse, c'est le cœfficient cinétique qui intervient dans la force de frottement. Celui-ci vaut :

$$\mu = (1 - 0{,}05) \cdot \mu_0 = 0{,}95 \cdot 0{,}62 = 0{,}59$$

Alors, sur l'axe x, avec la composante du poids parallèle au plan incliné et la force de frottement proportionnelle à la réaction R égale à la composante du poids perpendiculaire au plan, on peut écrire :

$$\begin{aligned} m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) = m \cdot a \quad &\Rightarrow \\ a = g \cdot (\sin(\alpha) - \mu \cdot \cos(\alpha)) & \\ = 9{,}81 \cdot (\sin(32) - 0{,}59 \cdot \cos(32)) &= 0{,}29\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

14 Tant que les deux blocs ne glissent pas, la force de frottement est statique. Si on considère comme système le bloc supérieur, celui-ci étant immobile sur le bloc inférieur, la forces F et celle de frottement s'annulent. Elles sont donc égales et si la force F exercée sur le bloc supérieur augmente, la force de frottement statique augmente également dans une exacte mesure. Cela jusqu'à la valeur de frottement statique maximum exercée par m sur M, donnée par l'équation :

$$\begin{aligned} F = F_{fr\ stat\ max} &= \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g \\ &= 0{,}6 \cdot 2 \cdot 9{,}81 = 11{,}77\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

On est alors à l'imminence de glissement.

Pour calculer l'accélération des deux masses, qui n'en forment alors plus qu'une, il faut choisir le système qui les constitue et écrire :

$$\begin{aligned} F = (M + m) \cdot a \ \Rightarrow \ a &= \frac{F}{M + m} \\ = \frac{11{,}77}{2 + 5} &= 1{,}68\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

À partir du moment où le glissement commence, la force de frottement statique maximum devient une force de frottement cinétique. Si les cœfficients de frottements statique et cinétique sont égaux, la force de frottement cinétique est égale à celle statique maximale et ne varie plus. Ainsi, sur le bloc du bas ne s'exerce qu'une seule force extérieure, c'est la réaction à la force de frottement cinétique exercée par le bloc du bas sur celui du haut. Sa valeur est donnée par le calcul ci-dessus. Ainsi, on peut écrire pour le système du bas :

$$\begin{aligned} F_{fr\ stat\ max} = M \cdot a_M \ &\Rightarrow \\ a_M = \frac{11{,}77}{5} &= 2{,}35\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

Quant au bloc du haut, deux forces extérieures s'exercent sur lui : la force F et la force de frottement dynamique, égale à la force de frottement statique maximale. Pour ce système, on peut écrire :

$$\begin{aligned} F - F_{fr\ stat\ max} &= m \cdot a_m \ \Rightarrow \\ a_m &= \frac{23,54 - 11,77}{2} = 5,89\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

15 Les deux forces de frottement statique et cinétique valent :

$$\begin{aligned} F_{fr\ stat\ max} &= \mu_{stat} \cdot m \cdot g \\ &= 0,6 \cdot 20'000 \cdot 9,81 = 117\ 720\,\mathrm{N} \\ F_{cin} &= \mu_{cin} \cdot m \cdot g \\ &= 0,4 \cdot 20'000 \cdot 9,81 = 78\ 480\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Les deux décélérations sont alors :

$$\begin{aligned} -F_{fr\ stat\ max} &= m \cdot a_{stat} \ \Rightarrow \\ a_{stat} &= \frac{-117'720}{20'000} = -5,886\,\mathrm{m/s^2} \\ -F_{cin} &= m \cdot a_{cin} \ \Rightarrow \\ a_{cin} &= \frac{-78'480}{20'000} = -3,924\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

On peut alors calculer la distance de freinage dans chaque cas :

$$\begin{aligned} v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot d \ \Rightarrow \ d &= \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot a} \\ d_{stat} &= \frac{0 - 13,89^2}{2 \cdot (-5,886)} = 16,39\,\mathrm{m} \\ d_{cin} &= \frac{0 - 13,89^2}{2 \cdot (-3,924)} = 24,58\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

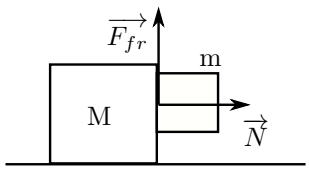
La différence est donc de $24,58 - 16,39 = 8,19\,\mathrm{m}$.

16 Le poids du bloc de masse m vaut :

$$P_m = m \cdot g = 3 \cdot 9,81 = 29,43\,\mathrm{N}$$

Pour que ce bloc ne tombe pas, il faut qu'une force verticale s'exerce vers le haut et compense le poids calculé ci-dessus, soit $F_{fr} = P$. L'origine de cette force est évidemment le frottement entre les deux blocs. Or, celle-ci dépend de la force exercée par la masse M sur m, notée $\overrightarrow{N}$, qui joue le rôle de la réaction R du sol pour un objet glissant horizontalement. La figure L.18 présente la situation qui

Figure L.18 – *Forces sur le bloc suspendu*



permet d'exprimer la force de frottement et de déterminer la valeur N de la réaction.

$$\begin{aligned} F_{fr} &= \mu_{stat} \cdot N \ \Rightarrow \\ N &= \frac{F_{fr}}{\mu_{stat}} = \frac{29,43}{0,5} = 58,86\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

On peut dire en français que pour avoir une force de frottement donnée il faut une réaction normale N de valeur double, en raison du cœfficient de frottement particulier ici.

C'est la force normale $\overrightarrow{N}$ qui est la seule force qui pousse la masse m horizontalement. Elle est donc responsable de l'accélération qu'on peut ainsi calculer simplement à l'aide de la seconde loi :

$$a = \frac{N}{m} = \frac{58,56}{3} = 19,62\,\mathrm{m/s^2}$$

Cette accélération est celle de la masse m, mais aussi de M. La valeur F de la force permettant de l'obtenir pour le système constitué par les deux masses est donc finalement :

$$F = (M + m) \cdot a = 7 \cdot 19,62 = 137,34\,\mathrm{N}$$

17 Un autre corrigé de test.

18 Un autre corrigé de test.

19 Un autre corrigé de test.

20 Le travail de l'équipe pour remonter le bobsleigh du bas de la piste à son point de départ sert à augmenter l'énergie potentielle du bob. On néglige les frottement exercés sur le véhicule de transport. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} E_{pot} &= m \cdot g \cdot h = 250 \cdot 9,81 \cdot (1000 - 800) \\ &= 490\ 500\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

pour une seule montée. Pour 5 montées, on a donc 2 452 500 J.

C'est évidemment la même énergie qui est perdue pendant la descente (à l'exception de la poussée initiale). Elle vient du travail du poids sur le bob et les quatre personnes qui se trouvent à l'intérieur.

L'énergie potentielle perdue par le bob sert à augmenter sa vitesse et à lutter contre le frottement. Le travail nécessaire à parvenir à une vitesse de 80 km/h est égal à l'énergie cinétique acquise. Pour un bob de 600 kg et une vitesse moyenne de 80/3,6=22,2 m/s, on a un travail de :

$$A = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 22,2^2 = 148\ 148\,\text{J}$$

par descente. Soit au total, pour 5 descentes 740 740 J.

Cette valeur est supérieure à l'énergie fournie au bob pendant la montée. C'est normal, car on a pas tenu compte alors de l'énergie nécessaire à monter les personnes. Pour cela, il faut calculer l'énergie potentielle acquise par la masse de 600 kg :

$$E_{pot} = 600 \cdot 9,81 \cdot 200 = 1\ 177\ 200\,\text{J}$$

qui est bien supérieure à celle fournie pour augmenter la vitesse.

La différence d'énergie potentielle et cinétique, soit 1'117'200-740'740 = 436 460 J, est perdue dans le frottement.

Comme la distance sur laquelle il s'exerce est de 1800 m, on peut calculer la force de frottement moyenne par :

$$A_{fr} = F_f r \cdot d \Rightarrow$$
$$F_{fr} = \frac{A_{fr}}{d} = \frac{436'460}{1'800} = 242,5\,\text{N}$$

C'est évidemment une estimation.

Annexe M

Ordre de grandeur, erreur et incertitudes

M.1 Ordre de grandeur

En physique la représentation des nombres est une chose complexe. Imaginez une mesure de la largeur d'une feuille A4 donnant le résultat de 21,035 443 29 cm. Quelle en est sa précision ? On peut pour l'évaluer la représenter en millimètre, soit 210,354 432 9 mm, en micromètre, soit 210 354,4329 µm, en nanomètre, soit 210 354 432,9 nm ou même en Angstrœm, soit 2 103 544 329 Å.

Comme elle semble être précise à l'ordre de grandeur de l'Angstrœm ($1 \cdot 10^{-10}$ m) et qu'on est alors à l'échelle de l'atome, on peut se demander comment une telle mesure peut avoir été réalisée.

Par ailleurs, faut-il écrire 21,0 cm, 21 cm, voir 2,1 dm, pour autant qu'il existe des avantages à utiliser l'une ou l'autre de ces notations ?

Ce qu'il faut garder à l'esprit, c'est que la représentation choisie peut être porteuse d'une information intéressante quant à la précision de la mesure qui est à son origine. Par exemple, entre 21,0 cm et 21 cm, si il n'y a aucune différence numérique, on peut considérer que la présence du zéro de la première expression signifie que sa précision est de l'ordre du millimètre, alors qu'elle est de l'ordre du centimètre dans la seconde.

M.1.1 Chiffres significatifs

Si on réalise une mesure au centimètre près et qu'on l'écrit comme 21,0 cm, on ne peut dire que le chiffre zéro signifie quelque chose. On dira donc que la mesure a été faite avec deux chiffres significatifs et on s'abstiendra d'écrire le zéro. Le nombre de chiffres significatifs dépend donc de l'estimation de la qualité de la mesure, de ce qu'on nomme incertitude et qu'on présentera plus loin. Ainsi, quand cette estimation s'exprime correctement dans l'expression d'un nombre, le nombre de chiffres significatifs est simplement le nombre de chiffres présents, à l'exception des zéros qui pourraient se trouver à gauche du nombre.

Ainsi, écrire 21 cm ou 2,1 dm ne change pas le nombre de chiffres significatifs qui est ici de deux.

M.1.2 Ordre de grandeur

Qu'en est-il exactement de la notion d'ordre de grandeur ?

L'ordre de grandeur du chiffre 2 045 000 m est le million de mètres, qu'on le représente comme précédemment ou par $2045 \cdot 10^3$ m ou encore par $2{,}045 \cdot 10^6$ m. Il s'agit toujours du million de mètres ou du millier de kilomètres. On voit que l'expression de l'ordre de grandeur dépend de l'unité choisie (million de mètres ou millier de kilomètres) et se situe dans le premier chiffre du nombre. C'est pourquoi son expression sous une forme particulière de notation scientifique est intéressante pour déterminer l'ordre de grandeur d'un nombre.

Généralement, la notation scientifique se définit par la présence d'une mantisse, d'une base et d'un exposant. Ainsi, $2045 \cdot 10^3$ m ou encore $2{,}045 \cdot 10^6$ m sont des nombre exprimés en notation scientifique. Mais la seconde expression est plus intéressante du point de vue de l'ordre de grandeur,

car on y lit celui-ci directement dans l'exposant. Cette notation scientifique particulière ne comporte qu'un seul et unique chiffre avant la virgule et celui-ci est différent de zéro.

Si on utilise la notation scientifique particulière présentée ci-dessus, l'ordre de grandeur d'un chiffre exprimé dans une unité donnée est son exposant.

Relevez enfin qu'il ne faut pas confondre notation scientifique et notation d'ingénieur . Cette dernière est une notation scientifique dont les exposants sont des multiples de trois. La raison en est que les préfixes des unités changent généralement leurs ordres de grandeur par trois : $1 \cdot 10^{-3}$ mm, $1 \cdot 10^{-6}$ µm ou $1 \cdot 10^{-9}$ nm, etc.

M.2 Écart et erreur

On peut facilement déterminer l'écart entre deux valeurs a et b par leur différence a-b. On peut, par exemple, mesurer la longueur L des baguettes de pain vendues par un boulanger et déterminer les différents écarts entre elles. Par exemple, on pourrait avoir une série de mesures telles que celle données dans le tableau M.1.

Table M.1 – *La longueur des baguettes de pain*

L cm	**Écart** cm	**Écart** %	**Erreur** cm	**Erreur** %
60	-2	-3.2	0	0.0
65	3	4.8	5	8.3
64	2	3.2	4	6.7
58	-4	-6.5	-2	-3.3
61	-1	-1.6	1	1.7
57	-5	-8.1	-3	-5.0
60	-2	-3.2	0	0.0
64	2	3.2	4	6.7
62	0	0.0	2	3.3
65	3	4.8	5	8.3
63	1	1.6	3	5.0
60	-2	-3.2	0	0.0
64	2	3.2	4	6.7
65	3	4.8	5	8.3
Moyennes				
62	0.0	0.0	2.0	3.3

On voit immédiatement que le calcul des écarts pose un problème : il faut déterminer les écarts entre chaque baguettes deux par deux. On peut le faire. Mais quel sens cela a-t-il ?

Par contre, déterminer quel est l'écart à la moyenne des baguettes est plus instructif. La moyenne vaut 62 cm et la seconde colonne du tableau M.1 présente les écarts. On voit alors facilement que l'écart ne dépasse pas 5 cm. Ce qui peut avoir de l'importance si on a faim.

Par ailleurs, si on sait que le boulanger avait décidé de faire des baguettes de 60 cm, on peut se poser une autre question : quel est l'écart à cette valeur ? La quatrième colonne y apporte une réponse. Comme on utilise ce qu'on peut appeler une référence, on parlera d'*erreur*, plutôt que d'écart. Ce qui est alors intéressant, c'est qu'on voit que le boulanger à tendance à faire des baguettes trop grandes. Cela peut avoir une importance pour lui s'il a prévu un budget précis de matières premières pour des baguettes de 60 cm. Cela permet aussi de s'interroger sur la règle utilisée par le boulanger pour estimer la longueur des baguettes. Comme ses baguettes sont trop longues, on peut penser que sa règle est aussi trop longue, ce qui peut avoir pour conséquence une mauvaise estimation de la longueur de la baguette par le boulanger. On parlera alors d'une *erreur systématique* induite par un matériel mal calibré. Ce type d'erreur se détecte par la présence d'une importante quantité de signes systématiquement positifs ou systématiquement négatifs dans les écarts. En effet, si la règle avait une longueur correcte, l'erreur faite par le boulanger devrait être aléatoirement répartie autour de la valeur de 60 cm et les signes positifs et négatifs des écarts devraient être en nombres à peu près identiques.

Évidemment, la moyenne des écarts à la moyenne est nulle, cela par définition, alors que la moyenne des erreurs ne l'est pas en présence d'une erreur systématique.

Figurent aussi dans le tableau M.1 les écarts et erreurs relatifs en pourcents. Il s'agit du rapport entre l'écart et la valeur de référence : la moyenne pour l'écart et 60 cm pour l'erreur. Autant pour l'écart que pour l'erreur, on a donc :

$$e = \frac{val - val_{ref}}{val_{ref}} \cdot 100 \qquad \text{(M.1)}$$

Ces indications sont importantes si on désire comparer la production de deux boulangers dont la longueur de la baguette de référence n'est pas la même. Considérons le tableau M.2 qui décrit la

Table M.2 – *La longueur d'autres baguettes de pain*

L cm	**Écart** cm	**Écart** %	**Erreur** cm	**Erreur** %
40	-2	-4.8	0	0.0
44	2	4.8	4	10.0
41	-1	-2.4	1	2.5
44	2	4.8	4	10.0
43	1	2.4	3	7.5
42	0	0.0	2	5.0
44	2	4.8	4	10.0
42	0	0.0	2	5.0
42	0	0.0	2	5.0
43	1	2.4	3	7.5
43	1	2.4	3	7.5
41	-1	-2.4	1	2.5
40	-2	-4.8	0	0.0
39	-3	-7.1	-1	-2.5
Moyennes				
42	0.0	0.0	2.0	5.0

production d'un boulanger dont la baguette de référence est de 40 cm. On voit que la moyenne des écarts est nulle comme pour le boulanger précédent. Ce qui est normal en raison du choix de la valeur moyenne comme référence. On voit aussi que la moyenne des erreurs est la même et qu'il y a une grande systématique dans celle-ci, puisqu'elles sont pratiquement toutes positives. Cela signifie probablement, comme précédemment, que l'appareil de mesure à un biais, que la règle utilisée est trop longue. Par contre, on voit grâce à la dernière colonne donnant l'erreur relative que celle-ci est plus importante pour le second boulanger. Cela s'explique facilement. En effet, l'erreur moyenne est la même, mais la baguette de référence du second boulanger est plus courte (40 cm). Ainsi, malgré la différence de longueur de la baguette de référence, l'erreur relative permet de comparer les erreurs des deux boulangers.

Imaginons maintenant qu'on s'intéresse à la production annuelle de baguettes d'un boulanger, soit des centaines de baguettes. Il devient difficile de les représenter dans un tableau, surtout si on fait des mesures d'une précision supérieures au centimètre. On peut alors réaliser des classes de mesures (on parle d'enclassement) en mettant par exemple, toutes les baguettes entre 42,5 cm et 43,4 cm dans la classe des baguettes de 43 cm. En procédant de la même manière pour les autres valeurs, on peut alors obtenir des mesures comme celles présentées dans le tableau M.3 où L est la longueur des baguettes et n le nombre de baguettes dans la classe associée à cette longueur, soit la fréquence d'apparition de la longueur.

Table M.3 – *Des centaines de baguettes de pain*

L cm	n -
38	53
39	72
40	95
41	121
42	130
43	118
44	90
45	67
46	44
Moyennes	
41,9	-

La moyenne μ de la longueur des baguettes est alors calculée ainsi :

$$\mu = \frac{\sum\limits_i L_i \cdot n_i}{\sum\limits_i N_i} = \frac{33'116}{790} = 41{,}9\,\text{cm}$$

La moyenne des fréquences n n'a que peu de sens.

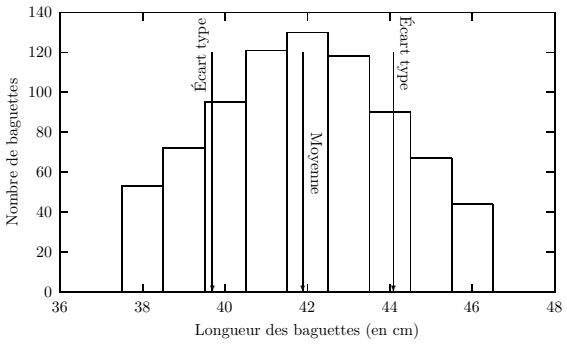
On peut aussi représenter ces mesures graphiquement, comme le montre la figure M.1.

Sur un grand nombre de mesures, la notion d'écart devient difficile à gérer. On utilise alors celle d'écart type [a] définie par :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\limits_i n_i \cdot (L_i - \mu)^2}{\sum\limits_i n_i - 1}} = \sqrt{\frac{3'777.1}{789}} = 2{,}2\,\text{cm}$$

a. Le -1 apparaissant au dénominateur de la fraction de l'écart type vient d'une estimation de l'écart type (ou variance) de la population des mesures basée sur un échantillon de celle-ci. Pour bien le comprendre, il faut évoquer le calcul des probabilités et la notion de variable aléatoire, ce qui dépasse le cadre de ce document. Vous trouverez des informations sur internet.

Figure M.1 – *Baguettes d'une année*



Il s'agit de la moyenne des écarts quadratiques, soit de la racine de la moyenne des écarts au carrés. L'élévation au carré permet de ne pas tenir compte du signe des écarts.

On peut alors affirmer qu'une forte proportion de la longueur L des baguettes se trouve entre $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$, soit entre 39,7 et 44,1 cm.

Pour aller plus loin, il faut voir l'ensemble complet des mesures qui pourraient être faites dans le cadre d'une loi physique donnée comme une population qu'on ne pourrait étudier qu'à partir d'échantillons partiels extraits de celle-ci. Imaginez la population de tous les éléphants existants sur la Terre. Pour l'étudier, il faut en prélever un ou plusieurs échantillons dont les propriétés peuvent être différentes de celles de la population. Par exemple, la masse moyenne de la population des éléphants peut être différente de celle d'un échantillon d'éléphants pris par hasard obèses. La science des probabilités et statistiques dispose d'outils pour caractériser les échantillons, mais aussi pour en déduire les caractéristiques des populations. Mais cette science, qui repose sur les probabilités, est malheureusement hors du cadre de cet ouvrage.

M.3 Incertitude

Avec les écarts, on étudie la répartition de mesures réalisées. Du point de vue des probabilités et statistiques, on parlera des propriété d'un échantillon de mesures relatives à une loi donnée.

Avec les incertitudes, on va s'intéresser à l'évaluation des capacités des instruments de mesures. Ces deux domaines n'ont rien à voir l'un avec l'autre, si ce n'est qu'ils sont les deux nécessaires à la réalisation des expériences de physique. Le problème est que l'évaluation de la qualité de mesure des instruments nécessite des méthodes de probabilités et statistiques. Cette évaluation peut donc devenir complexe si on entre réellement dans les détails.

Nous en resterons ici à un niveau aussi simple que possible en admettant qu'il soit possible d'évaluer la précision d'un instrument de mesure sans avoir recours aux statistique pour le calibrer ou que cette calibration ait été réalisée par ailleurs et soit disponible.

Imaginons donc la mesure de la longueur d'une feuille A4 à l'aide d'une règle. La présentation de cette mesure est la suivante :

$$L = L_m \pm I(L_m)$$

où, L est la grandeur, L_m sa valeur et $I(L_m)$ son incertitude absolue. Par exemple, une mesure pourrait donner :

$$L = 29{,}0\,\text{pm}\,0{,}2\,\text{cm}$$

L'origine de l'incertitude absolue peut être de diverses nature :

1. une estimation de la précision suite à la lecture visuelle sur la règle selon sa graduation, la distance à laquelle ou l'angle sous lequel on la regarde, ...,
2. une information du fabriquant qui a réalisé des tests approfondis,
3. une étude statistique à travers un ou plusieurs échantillons sur une mesure identique, etc.

Conformément à ce que nous avons dit plus haut, on ne considérera pas le dernier point.

Admettons maintenant qu'on réalise aussi une mesure de la largeur de la feuille, mais avec une règle différente, et obtienne :

$$l = 21{,}1\,\text{pm}\,0{,}3\,\text{cm}$$

M.3.1 Addition/soustraction

Que pouvons-nous dire alors du périmètre de la feuille ?

Évidemment, il est facile à calculer :

$$P = 2 \cdot L_m + 2 \cdot l_m = 2 \cdot (29,0 + 21,1) = 100{,}2\,\text{cm}$$

Mais qu'en est-il de son incertitude ? Pour la connaître, on va calculer l'incertitude absolue de la somme de deux grandeurs en déterminant les maximum et minimum de celle-ci. Formellement, si :

$$s = l_1 + l_2 \; ; \; l_1 = l_{1m} \pm I(l_{1m}) \; ; \; l_2 = l_{2m} \pm I(l_{2m})$$

alors, on peut calculer les extremums :

$$\begin{aligned} s_{max} &= l_{1\,max} + l_{2\,max} \\ &= l_{1m} + I(l_{1m}) + l_{2m} + I(l_{2m}) \\ &= l_{1m} + l_{2m} + I(l_{1m}) + I(l_{2m}) \\ &= s_m + I(s_m) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} s_{min} &= l_{1\,min} + l_{2\,min} \\ &= l_{1m} - I(l_{1m}) + l_{2m} - I(l_{2m}) \\ &= l_{1m} + l_{2m} - I(l_{1m}) - I(l_{2m}) \\ &= s_m - I(s_m) \end{aligned}$$

et en déduire que l'incertitude d'une somme ou d'une soustraction :

$$\boxed{\text{Si } s = l_1 \pm l_2 \;\Rightarrow\; I(s_m) = I(l_{1m}) + I(l_{2m})}$$

On peut alors calculer l'incertitude sur le périmètre :

$$\begin{aligned} I(P_m) &= 2 \cdot I(L_m) + 2 \cdot I(l_m) \\ &= 2 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 = 1{,}0\,\text{cm} \end{aligned}$$

et donner le résultat final sous la forme :

$$C = 100{,}2\,\text{pm}\,1{,}0\,\text{cm}$$

M.3.2 Multiplication par un entier

De l'équation précédente, on tire facilement que :

$$I(2 \cdot b_m) = I(b_m) + I(b_m) = 2 \cdot I(b_m)$$

et en généralisant que :

$$\boxed{\text{Si } c = n \cdot b \;\Rightarrow\; I(c_m) = n \cdot I(b_m)}$$

M.3.3 Multiplication/division

Que pouvons-nous dire de la surface de la feuille ? Évidemment, elle est facile à calculer :

$$S = l_1 \cdot l_2 = 29,0 \cdot 21,1 = 611{,}9\,\text{cm}^2$$

Mais qu'en est-il de son incertitude ? Pour la connaître, on va calculer l'incertitude absolue de la multiplication de deux grandeurs en déterminant les maximum et minimum de celle-ci. Formellement, si :

$$S = l_1 \cdot l_2 \; ; \; l_1 = l_{1m} \pm I(l_{1m}) \; ; \; l_2 = l_{2m} \pm I(l_{2m})$$

alors, on peut calculer le maximum :

$$\begin{aligned} S_{max} &= l_{1\,max} \cdot l_{2\,max} \\ &= (l_{1m} + I(l_{1m})) \cdot (l_{2m} + I(l_{2m})) \\ &= l_{1m} \cdot l_{2m} + l_{1m} \cdot I(l_{2m}) \\ &\quad + l_{2m} \cdot I(l_{1m}) + I(l_{1m}) \cdot I(l_{2m}) \\ &= S_m + I(S_m) \end{aligned}$$

L'expression de l'incertitude s'avère alors pour le moins complexe :

$$I(S_m) = l_{1m} \cdot I(l_{2m}) + l_{2m} \cdot I(l_{1m}) + I(l_{1m}) \cdot I(l_{2m})$$

Mais, comme $S = l_1 \cdot l_2$, on peut diviser cette équation par S :

$$\begin{aligned} \frac{I(S_m)}{S_m} &= \frac{l_{1m} \cdot I(l_{2m})}{l_{1m} \cdot l_{2m}} + \frac{l_{2m} \cdot I(l_{1m})}{l_{1m} \cdot l_{2m}} + \frac{I(l_{1m}) \cdot I(l_{2m})}{l_{1m} \cdot l_{2m}} \\ &= \frac{I(l_{1m})}{l_{1m}} + \frac{I(l_{2m})}{l_{2m}} + \frac{I(l_{1m}) \cdot I(l_{2m})}{l_{1m} \cdot l_{2m}} \end{aligned}$$

Pour autant que l'incertitude soit nettement plus petite que la grandeur qui lui correspond, le terme $I(l_{1m}) \cdot I(l_{2m})$ est très petit devant $l_{1m} \cdot l_{2m}$ et donc il est possible de négliger le dernier terme. Dans ces conditions :

$$\frac{I(l_{1m}) \cdot I(l_{2m})}{l_{1m} \cdot l_{2m}} << 1$$

et on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{I(S_m)}{S_m} &\cong \frac{I(l_{1m})}{l_{1m}} + \frac{I(l_{2m})}{l_{2m}} \;\Rightarrow \\ i(S_m) &= i(l_{1m}) + i(l_{2m}) \end{aligned}$$

en définissant l'incertitude relative par :

$$\boxed{i(G_m) = \frac{I(G_m)}{G_m}}$$

L'incertitude relative, comme expression de l'incertitude absolue rapportée à la valeur de sa grandeur, représente une incertitude sans unités qu'on peut exprimer en pourcents. En utilisant l'incertitude relative, l'expression de l'incertitude d'une multiplication de deux grandeurs devient alors bien plus simple.

Par ailleurs, on peut que le résultat est le même pour le minimum et pour la division de deux grandeurs. Ainsi, finalement, on peut écrire :

$$\boxed{\text{Si } S = l_1 \cdot \div l_2 \;\Rightarrow\; i(S_m) = i(l_{1m}) + i(l_{2m})}$$

Pour revenir à l'exemple de la surface de la feuille A4, pour en calculer l'incertitude absolue, on écrit :

$$\begin{aligned} I(S_m) &= S_m \cdot i(S_m) = L_m \cdot l_m \cdot i(L_m \cdot l_m) \\ &= L_m \cdot l_m \cdot (i(L_m) + i(l_m)) \\ &= L_m \cdot l_m \cdot (\frac{I(L_m)}{L_m} + \frac{I(l_m)}{l_m}) \\ &= 29,0 \cdot 21,1 \cdot (\frac{0,2}{29,0} + \frac{0,3}{21,1}) \\ &= 611,9 \cdot (0,007 + 0,014) \\ &= 611,9 \cdot (0,7\% + 1,4\%) \\ &= 611,9 \cdot 2,1\% = 12,8\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Ainsi, le résultat final est :

$$S = 611{,}9\,\text{pm}\,12{,}8\,\text{cm}^2$$

L'expression du calcul en pourcent permet de se rendre compte que c'est la mesure de la largeur de la feuille qui est la plus imprécise (1,4% contre 0,7% pour la longueur) et que l'incertitude relative est relativement faible (2,1%).

Par ailleurs, un problème se pose quant à l'expression du résultat dont l'incertitude absolue est arrondie : jusqu'où devons nous aller dans l'arrondi ? Il n'existe pas de réponse logique à ce problème. Mais avec l'incertitude absolue obtenue, on se rend compte que le plus grand chiffre affecté par celle-ci est celui des dizaines de centimètres. Comme l'incertitude absolue est supérieure à $10\,\text{cm}^2$, il est courant dans ce cas, d'utiliser le chiffre des dizaines arrondis à sa limite supérieure, soit $20\,\text{cm}^2$, pour écrire le résultat sous la forme :

$$S = 611{,}9\,\text{pm}\,20\,\text{cm}^2$$

ou, par changement du préfixe de l'unité :

$$S = 6{,}1\,\text{pm}\,0{,}2\,\text{cm}^2$$

M.3.4 Puissance

Si on veut calculer l'incertitude sur une grandeur élevée au carré, il suffit d'écrire :

$$i(a_m^2) = i(a_m \cdot a_m) = i(a_m) + i(a_m) = 2 \cdot i(a_m)$$

On peut généraliser cette expression à celle d'une puissance quelconque :

$$\boxed{\text{Si } c = a^n \;\Rightarrow\; i(c_m) = n \cdot i(a_m)}$$

En particulier, pour des valeurs de n comme 1/2 ou 1/3, voire 3/5, cette équation s'applique.

M.3.5 Résumé

L'incertitude relative est le rapport entre l'incertitude absolue et la valeur de la grandeur correspondante.

Pour l'addition et la soustraction, on somme donc les incertitudes absolues et pour la multiplication et la division, on somme les incertitudes relatives.

Pour la multiplication par un entier, on multiplie l'incertitude absolue par celui-ci et pour l'élévation à une puissance, on multiplie l'incertitude relative par celle-ci.

$$\boxed{\begin{array}{l} I(a_m) = a_m \cdot i(a_m) \text{ ou } i(a_m) = I(a_m)/a_m \\ \text{Si } s = l_1 \pm l_2 \;\Rightarrow\; I(s_m) = I(l_{1m}) + I(l_{2m}) \\ \text{Si } c = n \cdot b \;\Rightarrow\; I(c_m) = n \cdot I(b_m) \\ \text{Si } S = l_1 \cdot \div l_2 \;\Rightarrow\; i(S_m) = i(l_{1m}) + i(l_{2m}) \\ \text{Si } c = a^n \;\Rightarrow\; i(c_m) = n \cdot i(a_m) \end{array}}$$

M.3.6 Exemples

Voici finalement quelques exemples simples de calcul de l'incertitude d'équations connues à partir des règles énoncées ci-dessus. Remarquez qu'on calcule ici l'incertitude absolue directement. Si on connaît bien le mécanisme de calcul, il est aussi possible de calculer d'abord les incertitudes relatives des grandeurs mesurées et de les utiliser ensuite pour calculer l'incertitude absolue.

— Pour obtenir l'incertitude sur l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} E_{pot} &= m \cdot g \cdot h \\ I(E_{pot}) &= E_{pot} \cdot i(E_{pot}) \\ &= m \cdot g \cdot h \cdot i(m \cdot g \cdot h) \\ &= m \cdot g \cdot h \cdot (i(m) + i(g) + i(h)) \\ &= m \cdot g \cdot h \cdot (\frac{i(m)}{m} + \frac{i(g)}{g} + \frac{i(h)}{h}) \end{aligned}$$

C'est l'exemple le plus simple mettant en jeu des incertitudes relatives.

— Pour obtenir l'incertitude sur l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} E_{cin} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ I(E_{cin}) &= E_{cin} \cdot i(E_{cin}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \cdot i(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \cdot (i(\frac{1}{2}) + i(m) + i(v^2)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \cdot (0 + i(m) + 2 \cdot i(v)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \cdot (\frac{I(m)}{m} + 2 \cdot \frac{I(v)}{v}) \end{aligned}$$

en remarquant que $I(2) = 0$, puisqu'il n'y a aucune incertitude sur une valeur parfaitement connue.

— Pour la vitesse finale de chute libre à vitesse initiale nulle :

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \\ I(v) &= v \cdot i(v) \\ &= \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \cdot i(\sqrt{2 \cdot g \cdot h}) \\ &= \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \cdot \frac{1}{2} \cdot i(2 \cdot g \cdot h) \\ &= \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \cdot \frac{1}{2} \cdot (i(2) + i(g) + i(h)) \\ &= \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{I(g)}{g} + \frac{I(h)}{h}) \end{aligned}$$

avec la même remarque que précédemment pour l'incertitude sur la valeur 2.

Notes

[1]Voir le site du télescope spatial Hubble : http://hubble.nasa.gov/multimedia/astronomy.php notamment pour le copyright de l'image. Remerciements à la NASA.

[2]Voir le site de l'encyclopédie Wikipedia : http://fr.wikipedia.org/wiki/Image:End_of_universe.jpg notamment pour le copyright de l'image. Remerciements à la NASA.

[3]Voir le site de l'encyclopédie Wikipedia : http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Giordano_Bruno.jpg

[4]Voir le site de l'encyclopédie wikipedia : http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Vie_du_soleil.jpg

[5]Voir le site de l'encyclopédie Wikipedia : http://fr.wikipedia.org/wiki/Accueil notamment pour le copyright de l'image. Remerciements à son auteur Greg Goebel.

[6]Voir le site du télescope spatial Hubble : op cit. Remerciements à la NASA.

[7]Voir le site du télescope spatial Hubble : ibid. Remerciements à la NASA.

[8]Voir le site du télescope spatial Hubble : ibid. Remerciements à la NASA.

[9]Voir : http://fr.wikipedia.org/wiki/Plan%C3%A8tes_extrasolaires

[10]Voir le site de Hubble : http://hubblesite.org/newscenter/archive/releases/2005/03/image/a/

[11]Voir le site de l'encyclopédie wikipedia : http://fr.wikipedia.org/wiki/Image:Solar_sys.jpg Remerciements à la NASA.

[12]Voir le site de l'encyclopédie : http://fr.wikipedia.org/wiki/Image:Portrait_de_famille_%281_px_%3D_1000_km%29.jpg Remerciements à la NASA.

[13]voir : http://fr.wikipedia.org/wiki/Nuage_de_Oort

[14]Voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Leonides

[15]Voir le site du télescope spatial Hubble : ibid. Remerciements à la NASA.

[16]Voir le site de l'encyclopédie wikipedia : http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Leonid_Meteor_Storm_1833.jpg

[17]Voir le site de l'encyclopédie Wikipedia : http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Moon_Earth_Comparison.png. Remerciements à la NASA.

[18]Voir le site de l'encyclopédie : http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:TerreOrbiteLuneEtPhases.png

[19]Voir le site de l'encyclopédie Wikipedia : http://fr.wikipedia.org/wiki/Image:Orbite-lune-soleil.png

[20]Voir aux sujet des éclipses l'excellent site de l'institut de mécanique céleste : http ://www.imcce.fr/

[21]Voir le site de l'encyclopédie Wikipedia : http://fr.wikipedia.org/wiki/Image:Crab_Nebula.jpg notamment pour le copyright de l'image.

[22]Voir le site de l'encyclopédie Wikipedia : http://fr.wikipedia.org/wiki/Accueil notamment pour le copyright de l'image. Remerciements à son auteur Christophe Dang Ngoc Chan.

[23]Voir le site de l'encyclopédie Wikipedia : http://fr.wikipedia.org/wiki/Accueil notamment pour le copyright de l'image. Remerciements à son auteur Pickwick.

[24]Voir le site de l'encyclopédie Wikipedia : http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:8orbitals.jpg notamment pour le copyright de l'image.

[25]Voir : http://cui.unige.ch/isi/ssc/phys/Rubbia-Klapisch.html

[26]Voir le site de la NASA (notamment pour le copyright : sans copyright) : http://grin.hq.nasa.gov/ABSTRACTS/GPN-2002-000069.html

[27]Les missions Apollo : http://perso.wanadoo.fr/alexandre.schwenk/index.htm

[28]Voir le site de Wikicommon (notamment pour le copyright : sans copyright) : http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Andromeda_collision.jpg

[29]Voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Image:Galilee.jpg

[30]Mes plus vifs remerciements à Emilio Segrè Visual Archives pour son autorisation de reproduire ici ce document. Le lien vers l'image est : http://photos.aip.org/quickSearch.jsp?qsearch=Newton+isaac+H5&group=10&Submit=GO

[31]Voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Image:Johannes_Kepler_1610.jpg

[32]Voir le site de wikipedia : http://fr.wikipedia.org/wiki/Image:Kepler_Optica.jpg notamment pour le copyright de l'image.

[33]Voir http://fr.wikipedia.org/wiki/La_Physique_%28Aristote%29

[34]Voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Image:Aristotle_by_Raphael.jpg

[35]Voir http://en.wikipedia.org/wiki/Image:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg

[36]Voir le site de l'encyclopédie Wikipedia : http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Cavendish-lab.jpg notamment pour le copyright de l'image.

[37]Voir wikicommons : http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1b/Wikiman_1m80.svg

[38]Voir le site de l'encyclopédie Wikipedia : http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Rollercoaster_Tornado_Avonturenpark_Hellendoorn_Netherlands.jpg

[39]Une excellente analyse du choc de deux disques à été faite par Pascal Rebetez et se trouve à l'adresse http://owl-ge.ch/IMG/pdf/choc_2D_avec_citation.pdf

[40]Voir le site de l'encyclopédie Wikipedia : http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Finowkanal-treidel.jpg

[41]Voir le site de l'encyclopédie Wikipedia : http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Mozaic-garden009.jpg

[42]Voir le site : http://www.emosson-lac.ch/barrage.htm

[43]Voir le site de l'encyclopédie Wikipedia : http://fr.wikipedia.org/wiki/Image:S_vs_pelton_schnitt_1_zoom.png

[44]Voir le site de l'encyclopédie : http://fr.wikipedia.org/wiki/Image:Photoelectric_effect.png

[45]Voir le site de l'encyclopédie : http://fr.wikipedia.org/wiki/Image:4inch_poly_solar_cell.jpg

[46]voir le site OutilsSolaires : http://www.outilssolaires.com/pv/prin-bilan.htm

[47]voir aussi l'étude : « Compared assessment of selected environmental indicators of photovoltaic electricity in OECD cities » à l'adresse : http://www.eupvplatform.org/fileadmin/Documents/Brochure-indicateurs_26_pays.pdf

[48]Voir le site de l'encyclopédie : http://fr.wikipedia.org/wiki/Image:Tableau-lindal.jpg

[49]Voir le site de l'encyclopédie : http://fr.wikipedia.org/wiki/Image:Boiling_nuclear_reactor.png

[50]Voir le site de l'encyclopédie : http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Combustion_methane.png

[51]Voir Wikipedia : https://fr.wikipedia.org/wiki/Principe_de_moindre_action

[52]Voir Wikipedia : https://fr.wikipedia.org/wiki/Principe_de_moindre_action_et_mÃ¯canique_classique

[53]Voir Wikipedia : https://fr.wikipedia.org/wiki/Principe_de_moindre_action_et_mÃ¯canique_classique

[54]Voir le site de l'encyclopédie Wikipedia : http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Fahrenheit_Celsius_scales.jpg pour l'image de gauche et http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Celsius_kelvin_estandar_1954.png pour l'image de droite, notamment pour le copyright.

[55]Voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Image:Sadi_Carnot.jpeg

[56]Voir le site de l'encyclopédie :
http ://fr.wikipedia.org/wiki/Masse_atomique

[57]Voir Wikipedia : http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:4-Stroke-Engine.gif

[58]Voir le site de l'encyclopédie Wikipedia : http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Eclipse_lune.jpg. notamment pour le copyright de l'image. Remerciements à son auteur Luc Viatour.

[59]http://www.iap.fr/InformationCommunication/ArticlesGrandPublic/Etoiles/Transit/transit_parallaxe_mars_1672.html

[60]http://www.iap.fr/InformationCommunication/ArticlesGrandPublic/Etoiles/Transit/transit_parallaxe_mars_1672.html

[61]Voir le site de l'encyclopédie Wikipedia : http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Tychonian.gif notamment pour le copyright de l'image.

[62]Voir le site de l'encyclopédie Wikipedia : http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Milky_Way_2005.jpg. Image dans le domaine public. Remerciements à la NASA.

[63]Voir le site http://www.dil.univ-mrs.fr/~gispert/enseignement/astronomie/5eme_partie/voieLactee.php

[64]Voir le site de l'encyclopédie Wikipedia : http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Galileo_Galilei\%2C_Discorsi_e_Dimostrazioni_Matematiche_Intorno_a_Due_Nuove_Scienze\%2C_1638_\%281400x1400\%29.png.

[65]Voir le site de l'encyclopédie Wikipedia : http://fr.wikipedia.org/wiki/Image:Navstar-2.jpg notamment pour le copyright de l'image. Remerciements à la NASA.

[66]Voir le site de l'encyclopédie Wikipedia : http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Bay_of_Fundy.jpg notamment pour le copyright de l'image. Remerciements à son auteur Samuel Wantman.

[67]Voir le site de l'encyclopédie Wikipedia : http://fr.wikipedia.org/wiki/Limite_de_Roche notamment pour le copyright de l'image.

[68]Voir le site de RhônEole : http://www.rhoneole.ch/

[69]Voir le site de Juvent : http://www.juvent.ch/

[70]Voir les sites de Géothermie : http://www.geothermal-energy.ch/ et http://www.ader.ch/energieaufutur/energies/geothermie/index2.php

[71]voir dépliant "Nos déchets = notre énergie" sur le site : http://www.cridor.ch/content/doc/brochures.php

[72]Voir l'article complet à l'adresse : http://rspb.royalsocietypublishing.org/content/274/1626/2711 ou un lien à l'adresse http://dinonews.net/rubriq/articles.php5?ref=2007_sellers_speed

Bibliographie

Alder, K. (2005). *Mesurer le monde. L'incroyable histoire de l'invention du mètre.* Flammarion, original 2002, 2005 pour la traduction, flammarion édition. Ouvrage remarquable qui interroge sur l'unification des systèmes d'unités.

Balibar, F., Lévi-Leblond, J.-M. et Lehoucq, R. (2005). *Qu'est-ce que la matière.* Le pommier/Cité des sciences et de l'industrie, Paris. Petit ouvrage d'une clarté extraordinaire.

Biarnais, M.-F. (1985). *isaac newton, principia mathematica.* Christian Bourgois.

Casoli, F. et Encrenaz, T. (2005). *Planètes extrasolaires.* Belin Pour la science.

Delambre, J.-B. J. (1821). *Histoire de l'astronomie moderne.* Courcier, Paris. Ce livre est publié par google book à l'adresse http ://-books.google.ch sous "Histoire de l'astronomie moderne". Il existe aussi son pendant "Histoire de l'astronomie ancienne".

Galilei, G. (1992). *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde.* Seuil Points Sciences.

Gould, S. J. (2005). *Le renard et le hérisson.* Seuil, science ouverte, harmony books, new york, 2003 édition.

Gruber, C. (1988). *Mécanique générale.* Presses polytechniques romandes, CH-1015 Lausanne, première édition. Ouvrage très complet mais très mathématique.

Guérin, O. (2004). *Tout savoir sur les marées.* Éditions Ouest-France. Excellent ouvrage qui décompose l'analyse du phénomène des marées en différents rythmes. Cela permet une très grande clarté dans l'explication astronomique et essentiellement newtonienne (même si les marées côtières sont abordées).

Hawking, S. (2003). *Sur les épaules des géants.* Dunod, Paris.

Lévy-Leblond, J.-M. (1996). *Aux contraires L'exercice de la pensée et la pratique de la science.* Gallimard nrf essais.

Lévy-Leblond, J.-M. (2006). *De la matière relativiste quantique interactive.* Traces écrites, Édition du Seuil.

Lhomme, J.-C. (2004). *Les énergies renouvelables.* Delachaux et Niestlé, réimpression 2005, second tirage édition.

Lindemann, E. (1999). *Mécanique.* DeBoeck Université.

Nollert, H.-P. et Ruder, H. (2008). *Carnets de voyages relativistes. De la terre vers un trou noir.* Belin, Pour la science.

Ollivier, P. (2006). *Éoliennes, quand le vent nous éclaire.* Privat.

Reeves, H. et Lenoir, F. (2003). *Mal de Terre.* Édition du Seuil, Paris.

Robredo, J.-F. (2007). Comment l'univers à perdu tout point fixe. *Ciel et Espace*, Juin 2007.

Rocchi, J. (2000). *Giordano Bruno après le bûcher.* Complexe. Un ouvrage fantastique qui remet Galilée à sa juste place.

Simaan, A. (2002). Sur l'expérience d'érathostène. *Bulletin de l'Union des physiciens*, 96:1193–1196. Suite à l'article "Histoire des sciences : une expérience pédagogique en seconde", BUP No 843, avril 2002.

Simaan, A. (2006). *La science au péril de sa vie ; les aventuriers de la mesure du monde.* Vuibert / Adapt.

Simon, B. (2007). *La marée La marée océanique côtière.* Institut océanographique, Paris-Monaco. Ouvrage très complet et très mathématique d'analyse du phénomène de marée. La description statique de Newton est donnée en terme

de changement de référentiel non intertiel et en language vectoriel. Mais la construction de Procor y est très précisément justifiée, ce qui est un grand mérite. La description dynamique constitue le principal de l'ouvrage et se fonde sur l'analyse de Laplace. C'est un ouvrage qui nous place au coeur même des modèles mathématiques nécessaires pour prévoir les marées.

Susskind, L. et Hrabovsky, G. (2017). *Le minimum théorique*. Presse polytechniques et universitaires romandes, Lausanne.

Vauclair, S. (2006). *La naissance des éléments. Du big bang à la Terre.* Odile Jacob, Paris.

Index

Symbols

équation d'état, 143
évaporation, 141

A

absolu, 21
abstract, 176
accélération, 182
accélération, 39, 41, 42, 46, 47, 55, 58, 59, 80, 81, 119
    centrifuge, 81
    centripète, 81, 196, 198
    instantanée, 39
    terrestre, 44, 45
accélération
    moyenne, 39
accident nucléaire, 112
action, 107
action
    à distance, 58
activité, 114
agitation moléculaire, 132
Alexandrie, 169, 209
allongement, 70
Alpha du Centaure, 209
alternateur, 106, 107
altitude, 191
altitude, 59, 84
amas
    de galaxies, 22
Andromède, 23, 41
anneau d'astéroïdes, 202
année, 26
annexe, 176, 177
antimatière, 36
apesanteur, 47, 62, 63
aphélie, 201
apogée, 27, 201
Apollo, 172
Apollo, 40, 41
Arbeit, 119
Aristote, 42, 45, 51–55
Assouan, 169
astrogénèse, 32
atome, 32, 33
    naturel, 32
attraction, 40, 41, 45, 47, 55, 58
Atwood, 213
axe
    de rotation, 26
    demi-grand, 48
axiome, 55
azote, 33

B

balance, 199
balance, 60
balistique, 181
balistique, 44–46
balle, 44
barrage, 106, 205, 207, 208
barre de contrôle, 113, 115
basse mer, 199, 200
Beau de Rochas, 155
béryllium, 33
Bessel, 174
Betz, 109
big
    bang, 23, 33
boiler, 110
bombes à hydrogène, 115
bore, 33
boson, 35
Brahé

Tycho, 48, 49
Bruno
Giordano, 53, 54
Bruno Giordano, 193–195
but du travail pratique, 176

C

canon, 181
capacité thermique, 140
capsule, 40
carbone, 33
Carnot Nicolas Léonard, 135
carré
de la distance, 58
du temps, 43
cartésien, 37
Cassini, 172, 173
cause
du changement du mouvement, 57
du mouvement, 55, 57, 119
ceinture
d'astéroïde, 25
de Kuiper, 25
Celsius, 131
centre
de gravité, 66
de l'univers, 52
de la terre, 52
centre de gravité, 197
centrifuge, 62
centripète, 62
chaleur, 105, 131, 133, 134
latente, 133, 134
spécifique, 133
chaleur, 121
chaleur latente, 141
champ
de gravitation, 195
chauffage, 109
urbain, 112
chemin, 124
cheval vapeur, 102
chiffres
significatifs, 245
choc
galactique, 23
chute
libre, 3, 42, 44, 45, 58
chute libre, 181
cinéma, 37
cinématique, 36, 37, 52, 80, 196
d'Aristote, 52
cinq éléments, 52
circonférence
de la Terre, 64
de la terre, 169, 171
circulaire, 37
clarté, 175, 180
Cléomède, 169
cœfficient de frottement
cinétique, 69
statique, 69
colatitude, 168
combustion
des ordures, 110
du méthane, 115
comète, 26, 49
concision, 175
conclusion du travail pratique, 178
conduction, 109
conduite forcée, 205
conservation, 119, 122
de l'énergie, 122, 124
de l'énergie mécanique, 122
conservation de l'énergie, 104
conservative, 124, 125
constante
de la gravitation universelle, 58
construction
de Proctor, 66, 67
convection, 109
conversion, 163
coordonnée, 167, 168
sphériques, 167
coordonnée, 22, 37
circulaire, 47, 80
corps
ponctuel, 58
sphérique, 58
corpuscule, 35
cosmologie, 22, 51
aristotélicienne, 49
de Platon, 52
courbure, 45, 46
courbure de l'espace, 193, 196
cratère
lunaire, 49
cristal, 70
cristallin, 49
croûte terrestre, 112, 201

cycle
d'Otto, 155

D

débit, 106
aménagé, 205
de restitution, 205
décélération, 57
déchet radioactif, 114
déconstruction, 108
défaut de masse, 113
degré
Celsius, 131
centigrade, 131
Fahrenheit, 131
degré de liberté, 147
Delambre, 170
demi-vie, 114
déplacement, 38
dérivée, 38
description de l'expérience, 176
désintégration, 33
deutérium, 33
diamètre
apparent, 27, 170
dilatation du temps, 193
dimension, 22, 37, 73
discussion, 178
dissipation de l'énergie, 105
distance
de freinage, 70
parcourue, 38
dualité
onde corpuscule, 35
dynamique, 37, 47, 52, 81
d'Aristote, 53
dynamomètre, 69

E

eau
chaude sanitaire, 109, 110
écart, 177, 246
relatif, 246
type, 247
échantillon, 248
éclipse, 64
annulaire, 28
de Lune, 171
de Soleil, 171
lunaire, 28
solaire, 28, 64
totale, 28
écliptique, 26–28, 167, 169, 200, 201
EE, 164
effet
de serre, 116
photoélectrique, 109, 111
Eiffel, 53
Einstein, 193
Einstein, 47, 55
électron, 32, 33
élément
éther, 51
air, 51
eau, 51
feu, 51
élement
terre, 51
ellipse, 174, 201
ellipse, 26, 46
elliptique, 26
enclassement, 247
énergie, 101, 119, 121, 131, 182
éolienne, 108
cinétique, 103, 106, 109, 121, 122, 134
de combustion, 115
des déchets, 208
grise, 109, 112
hydraulique, 105, 205
interne, 134
mécanique, 104, 122, 123
non renouvelable, 112
potentielle, 102, 106, 121, 122, 124, 129, 134
renouvelable, 105
solaire, 109
électrique, 111
thermique, 109, 110
entropie, 158
éolienne, 206, 207
épicycle, 184
équateur, 185
terrestre, 183
équigravité, 40
équinoxe, 200
équipartition de l'énergie, 147
Ératosthène, 64, 169, 209
erreur, 177, 178
systématique, 178
erreur, 246
relative, 246

systématique, 246
espace
courbe, 47
interstellaire, 23
état
de mouvement, 52
de repos, 55
Étoile
Polaire, 26
étoile, 23, 24, 26
à neutrons, 24, 179
du matin, 26
du soir, 26
filante, 26
nouvelle, 179
Everest, 59
excentricité, 174
exemple de calcul, 178
exoplanète, 24
EXP, 164
expansion, 179
expansion, 22, 23, 41
extrados, 108

F

Fahrenheit, 131
fermion, 35
filaments, 179
fioul, 115
fission, 113, 114
fluide caloporteur, 113
fluide caloriporteur, 110
forage, 112, 208
force, 52, 54, 55, 62, 81
électrique, 32, 33, 58
électromagnétique, 58
centrifuge, 61, 62, 67, 195, 196
centripète, 61–63, 81
conservative, 103, 105, 124, 125
d'inertie, 61, 67, 68, 195–199
de frottement, 103, 121
de gravitation, 32, 47, 58–60, 196
de marée, 199
de réaction, 69
dissipative, 103, 105
extérieure, 56, 57
faible, 58
fictive, 61, 63, 195, 196
fondamentale, 35, 58
forte, 32, 58, 113
inertielle, 195
non conservative, 124
foyer, 174
foyer
d'une ellipse, 48
freinage, 57
frottement, 104
frottement, 42, 44, 47, 54, 57, 69, 123, 124
sec, 69
fusion, 115, 131, 141
fusion, 33

G

galaxie, 23, 24, 41
Galilée, 43, 49, 53, 181, 193
Galilei
Galileo, 43
gaz
à effet de serre, 108, 109, 112, 116
carbonique, 116
naturel, 110, 115
gaz
interstellaire, 33
géante
rouge, 24, 33
géocentrique, 54
géostationnaire, 62, 191
géothermie, 112, 207
Giordano
Bruno, 23
gnomon, 169
Grande
Ourse, 26
grandeur, 179
grandeur
conservée, 119
graphe
horaire, 43
graphe horaire, 180
graphique, 177
gravitation, 3, 23, 41
universelle, 47
gravité, 41
graviton, 35

H

Heisenberg, 35
héliocentrique, 54
hélium, 33
hémisphère, 27

Hooke, 59
    Robert, 59
hydrogène, 33

I

imminence
    de glissement, 69
immobilité de la terre, 184
impulsion, 95
incertitude, 171, 177, 178, 180, 248
    énergie cinétique, 251
    énergie potentielle, 251
    absolue, 248, 250
    addition, 250
    division, 250
    multiplication, 249, 250
    multiplication par un entier, 249, 250
    puissance, 250
    relative, 249, 250
    somme, 249
    soustraction, 249, 250
    vitesse chute libre, 251
inertie, 183–185
inertie, 53
infini, 23
interaction
    fondamentale, 35
intrados, 108
invariance, 195, 196
    du temps, 194
    formelle, 195, 196
Io, 201
irrigation, 108

J

joule, 101
Jupiter, 26

K

Kelvin, 132
Kepler
    troisième loi, 173
Kepler, 48, 49
    Johanes, 49
    première loi, 48
    seconde loi, 48
    troisième loi, 48
kilowattheure, 105
kinêma, 37
kWh, 105

L

latitude, 168
latitude, 22
Leibnitz, 59
Léonides, 26
lepton, 35
liaison, 113
liaison
    interatomique, 70
licence
    GFDL, 2
lieu naturel de repos, 52
ligne des nœuds, 28
limite
    de la deuxième loi, 61
limite de Betz, 109, 207
limite de Roche, 201
liquéfaction, 141
lithium, 33
Local Standard of Rest, 186
loi
    de la gravitation universelle, 191
loi
    de l'action et de la réaction, 56
    de l'inertie, 55
    de la gravitation, 55
    de la gravitation universelle, 47, 58, 59, 66, 84
    deuxième, 66
    fondamentale, 55
    fondamentale de la dynamique, 55, 56
    première, 55
    seconde, 55
    seconde loi, 84
    troisieme, 56
loi des gaz parfaits, 143
longitude, 168
longitude, 22
Lune, 26, 40, 45, 63
    Noire, 28

M

marée, 3, 65, 197
    côtière, 65, 201
    champ vectoriel, 67
    d'équinoxe, 200
    de basse mer, 65
    de déclinaison, 201
    de morte eau, 65
    de périgée, 201

de périhélie, 201
de pleine mer, 65
de vive eau, 65
de vives et mortes eaux, 200
haute, 66
océanique, 69
théorie ondulatoire, 65
théorie statique, 65
marée noire, 112
marnage, 200
Mars, 172
masse
critique, 113
volumique, 106
masse, 42, 56, 60
des astres, 64
mât, 207
mazout, 115
MCU, 47, 51, 52, 62, 80, 81
mécanique, 36, 51
d'Aristote, 54
de Newton, 55
Mendeleïev, 24
mesure
de distance, 169
météore, 26
Michelson et Morley, 186
minute d'arc, 163
molécule, 32
monde
sublunaire, 51, 63
supralunaire, 63
Mont Soleil, 108
morte eau, 200
moteur
à essence, 154
à explosion, 154
moteur idéal, 135
mouvement
circulaire
uniforme, 191
circulaire uniforme, 198
rectiligne uniforme, 195
simple, 180
mouvement, 36, 37
accéléré, 48
balistique, 48
central, 46
circulaire, 45, 61
uniforme, 47, 48, 51, 52
circulaire uniforme, 63, 80, 84
composé, 52
divin, 52
elliptique, 63
naturel, 47, 52
rectiligne
uniformément accéléré, 41, 44
uniforme, 39, 55
simple, 39
uniforme, 48
violent, 52
MRU, 180, 195
MRU, 39, 40, 42, 44, 45, 47, 80
MRUA, 180–182
MRUA, 41, 42, 44–46
multiple, 164

N

naine
blanche, 24
noire, 24
nébuleuse, 23
du crabe, 179
planétaire, 24
neutrino
électronique, 35
neutron, 32, 33
Newton, 41, 47, 51, 54, 57, 63
Isaac, 56
notation
d'ingénieur, 164, 246
scientifique, 164, 246
Nouvelle
Lune, 28
nouvelle
lune, 28
nouvelle lune, 200
nuage
de Oort, 26
nucléon, 113
nucléon, 35

O

obus, 44
onde, 33, 35
opposition, 173
optique, 55
orbite, 167, 191
circulaire, 185
de mars, 184

elliptique, 173, 174, 184
orbite, 26, 40, 62
circulaire, 47
de mars, 48
elliptique, 48, 49, 59
géostationnaire, 49, 84
ordonnée, 39
ordre
de grandeur, 246
origine, 37
oxygène, 33

P

pale, 108, 206, 207
palier
de fusion, 134
de liquéfaction, 134
de solidification, 134
de vaporisation, 134
parabole, 42, 44, 46
parallaxe, 172–174
stellaire, 174
paramètre, 179
Paris-Cayenne, 173
parsec, 163, 209
particule, 33
élémentaire, 33, 34
Partie théorique, 176
pc, 163
pendule, 179
pendule
de Foucault, 54
périgée, 27, 201
périhélie, 201
période, 64, 84, 179, 191
de révolution, 48
de rotation, 46
sidérale, 183, 185
synodique, 64
pétrole, 115
phase
de vénus, 49
lunaire, 28
phases de Vénus, 54
physique
quantique, 3
théorique, 129
plan
de l'écliptique, 68
plan incliné, 181
planète, 24, 26
extrasolaire, 24
jovienne, 26
tellurique, 26
plastique, 70
Platon, 42, 51, 63
pleine
Lune, 28
pleine lune, 200
pleine mer, 199, 200
Pline l'Ancien, 169
pluralité des mondes, 194
Pluton, 26
poids
relatif, 197, 199
poids, 45, 58–60, 63, 124
apparent, 60, 62
Polaire, 172
polyèdre
régulier, 49
pompe à chaleur, 112
pont
du Gard, 44, 45
population, 248
portance, 108
position, 167, 187
position, 37–39, 42, 56
positron, 36
première loi
de la thermodynamique, 135
premier principe, 135
première loi, 55
principe
de conservation de l'énergie, 104
principe
d'incertitude, 34
d'indétermination, 34
de moindre action, 129
Principia
mathematica, 55
procédure, 212
produit
scalaire, 120
proton, 32, 33
Proxima du Centaure, 174
pseudo-force, 196
centrifuge, 197
pseudo-force, 63, 67
centrifuge, 67, 69
d'inertie, 67

Ptolémée, 184
puissance, 101, 102
    de chute, 106
    installée, 105, 205
    solaire
        moyenne, 110
        utile, 110
pulsar, 179

Q

quantique, 35
quantité de mouvement, 95
quanton, 35
quark, 35
quartier
    lunaire, 28

R

radian, 26
radioactivité, 114
rail incliné, 180
rapport
    de laboratoire, 175
    de travail pratique, 176
rapport de compression, 156
rayon de la Terre, 209
réaction, 107
    en chaîne, 113
référentiel, 185, 186
    absolu, 186
    accéléré, 61
    en rotation, 63, 67
    inertiel, 62, 63, 67, 195
    non accéléré, 63
    non inertiel, 63, 67, 195, 196
    non-inertiel, 62
    tournant, 195, 197
règle de Betz, 109, 206
relativité, 184
    restreinte, 186
relativité, 21, 193
    de Galilée, 195
    générale, 3, 47, 51, 196
    galiléenne, 193, 196
    restreinte, 23, 51, 193, 195
rendement
    hydraulique, 106
    maximum, 135
    optique, 110
    photoélectrique, 111, 112
repos
    naturel, 52
ressort, 60, 70
résultats, 176
résumé, 176
rétine, 49
rétrogradation, 184
Richer, 172
Riehen, 112
rotation
    de la Terre, 183
    de la terre, 183
    du Soleil, 185
roue à aube, 107

S

saison, 26, 27
    d'éclipse, 29
satellite, 191
satellite, 3, 41, 47, 49, 54, 62, 84
    de jupiter, 49
Saturne, 202
scaphé, 170
scolastique, 53
second principe, 159
seconde
    d'arc, 163
    loi
        de Newton, 182, 191
seconde loi, 195
séisme, 112
SI, 163
signe
    des écarts, 246
silicium
    monocristallin, 111
    polycristallin, 111
Soleil, 183
Soleil, 24–26
soleil, 108
solidification, 141
solstice, 200
    d'été, 169
sous-multiple, 164
sphérique, 167
sphère
    cristalline, 49
sphérique, 37
stade, 170
statique, 69

Strabon, 169
structure
    de rapport, 175
structure, 21
subatomique, 32
sublunaire, 42, 45, 51
super
    amas, 21
supergéante, 24
supernovae, 24, 33
supralunaire, 42, 45
Syène, 169
Système
    International d'unités, 163
système
    de coordonnées circulaires, 167
système
    d'axes, 37, 73
    international, 132
    solaire, 24

T

tableau, 177
tableau
    périodique, 24
tache
    solaire, 49
tache solaire, 54
taux d'injection, 157
Tchernobyl, 115
température d'équilibre, 142
température, 131, 133, 134
temps, 21, 22, 43
    de vol, 45
Terre, 26
théorème
    d'addition des vitesses, 194
    de conservation, 101
        de l'énergie cinétique, 103
        de l'énergie mécanique, 103
    de l'énergie cinétique, 103
théorie
    des humeurs, 51
thermodynamique, 135
titre, 176
toupie, 27
trajectoire, 26, 33, 35
transformation
    de Galilée, 196
    galiléenne, 194
transition d'état, 141
transmutation, 115
travail, 101, 134
travail, 119–122, 124, 125
    simple, 120
tropique
    du Cancer, 169
trou
    noir, 24
trous
    noir, 3
turbine, 106, 112, 113, 205
    Francis, 107
    Kaplan, 107
    Pelton, 107
Tycho Brahé, 184
type
    de force, 57

U

UA, 163
unité, 163
unité
    de longueur, 37
univers, 21, 23, 42, 45
    bulle, 22

V

valeur en eau, 140
vapeur, 114
vaporisation, 131, 141
variable, 179
variation de l'énergie mécanique, 105
vent, 108
Vénus, 26
vitesse
    angulaire, 198
    constante, 193
    linéaire, 198
vitesse, 35, 38, 42, 43, 47, 53, 119
    constante, 55
    instantannée, 38
    moyenne, 38
    scalaire, 47, 81
vive eau, 200
Voie
    Lactée, 24, 41
Voie Lactée, 185
volcanisme, 201

W

watt, 102, 105

Z

zénith, 169, 197, 200, 209
zéro, 123
    de l'énergie potentielle, 126
zone contaminée, 115